入門講座
計測技術編－1

制御のための計測技術

北森俊行　法政大学工学部　システム制御工学科　教授
Toshiyuki Kitamori

Measurement Engineering for Control

1 はじめに

計測は生産現場や研究現場のみならず日常生活の場でも様々な形態で広く活用されている。制御のためにもいろいろな場面で計測が使われている。しかし広く、様々な姿で使われているために計測の本質が分かりにくくなっていることは否めない。そこで本講ではまず計測の本質的な構造を明らかにし、ついで制御のための計測のなかでその構造が分かりやすい状態観測の方法について解説したい。現実にデータを扱うときにはノイズの問題が大きいし、得られたデータについて処理をするには計測対象を支配している過程のモデルの精度が問題になるが、紙面も限られているので、基本的な構造に焦点を絞ることにする。

2 計測とは

高炉から流れ出てくる溶銑の温度を測るのは計測である。圧延した鋼板の板厚を測るのも計測である。しかしかなり前から画像処理を伴う計測も数多く行われている。計測の結果も温度が何度である、板厚が何ミリメートルであるという単純な場合から、高炉内の温度分布のようにCRTに図示し、いろいろな方向から見られるようにしなければならない場合もある。鋼板の表面性状や疵のように写真に撮っておかなければ細かいところが分からない場合もある。このように見回してみると単なる量の値のみならず、図示しなければならない分布（関数）や様々な量を組合わせた“状況”あるいは総合判断といった、高次元の“量”まで幅広く対象としていることが分かる。さらに、たとえば転炉の中でどのくらい酸素を吹込んだら何分後には何度になるかという“関係”を調べることもある。

計測という仕事は仕事というにはあまりにも日常的なところにすでに存在しているので、それが何であるかを正確にとらえることは簡単ではない。物差、時計、秤、温度計などはどこの家庭にもある。これらは長さ、時間、重さ、温度などの量を値としてとらえようとする道具である。一方では科学、技術の現場で、値としてとらえてグラフにプロットして、全貌をとらえたり、あるいはその全貌を表現するのに適切な特徴量を探し、その値を求めたり、量と量との間の関数関係を決定して、法則性をとらえたりしている。

このように様々な対象の属性をとらえる行為が計測であると考えるとき、表にでも整理した方が分かりやすいであろう。表1にその試みを示す。このように広がっているので、計測とは結局、何か知りたいことを知ることである、知識獲得の行為である、といわざるを得なくなる。

しかし知識獲得といってしまうと、たとえばアンケート調査も含まれてしまうかもしれない。根底に横たわる方法には、レベルの差はあれ、本質は共通であるはずであるから、社会的、経済的分野での知識獲得の活動を除外することが必要とは考えないが、通常、計測といっているのは自然科学や工学の範囲内であることが多い。自然科学や工学の範囲内ならば自然法則がしっかりしているので、それだけしっかりした知識獲得ができるからである。

3 計測の方法

科学や工学の現場で使われている計測システムは千差万別であって、その方法をひとことでまとめるのは容易ではない。しかしぎりぎりの共通点をとらえるならば難しくはない。われわれは高炉についていろいろなデータを採取する。そしてそんなデータが得られたのだから、高炉の中はこうなっているはずだという知識を獲得する。X線断層写真(CT)はいろいろな方向から身体にX線を透過させ、身体組織に吸収されないで通り抜けてきたX線の強さのデータを集める。そしてそのようなデータが得られたならば、身体内部（実はX線吸収率の異なる組織の配置）はこうなっているに違いないという計算をして画像に表示している

表1　計測の結果知りたい量、知識の種類と例

種　　類	例
残差がゼロか否か	零位法（計測法の一つ）におけるゼロの検出、在庫量の有無
量の値	一般の物理量の値
集合や関数の特徴を表す値	最大値、平均値、各種特性値、周期、隠れた周期
条件適合要素の同定、分類	公差範囲内の要素、最大要素、不良品、物質の同定、順序づけ、文字認識、音声認識、個人識別
存在の有無	異常・故障箇所、毒性、重力波、ニュートリノ、心霊現象
関係の有無	相関関係、因果関係、関数関係、医薬品の効果
特徴付け	特徴抽出、不快指数、騒音、味、におい、硬さ
予測	寿命予測、天気予報、地震予測
規則性	規則性、法則性

のである。水銀温度計で温度を読むときはそのデータが計算するまでもなくその周辺の温度であると判断する。しかしもしそのデータに誤差が入っていると考えられるときにはその誤差を除去するための計算をするか、誤差を含めた判断をするであろう。したがって、得られたデータそのものが即知識になる場合は簡単な極限であって、一般には何らかの計算を伴うと考えることができる。自然科学や工学の範囲内ならば自然法則がしっかりしているので、しっかりした計算ができるのである。これにくらべると、社会的、経済的分野には法則が必ずしもしっかりしていない現象が多く、人によって判断が大きく変ってしまう。

自然科学的、工学的分野に限ったとき、データを採集し、それから計測対象の内部がこうなっているに違いないという判断をする過程は図1のように見ることができる。ここで重要な意味をもっていることは、計測対象の内部からセンサーを通ってデータが出てくる過程は自然法則の成り行きであるが、すなわち対象の内部状態が原因で、自然法則にしたがってデータが結果として出てきたのであるが、得られたデータから対象の内部状態を知るということはその逆、すなわち自然法則にしたがう原因から結果への流れの逆であるということである。図には因果過程の逆ということで“果因過程”と書いた。そういう自然法則の逆の流れは自然法則（因果律）に反するから自然には起こらない。人間の知的活動の中でできることなのである。

簡単な例を考えよう。図2は鉄板の板厚を計測するために考案された計測系の一部分である。広い板の中央部分はノギスやマイクロメータで挟むわけにもいかない。そこで超音波の定在波を使って計測しようとした。超音波を送り込んで、その超音波の周波数を調節し、定在波ができたこと（一種の共振状態）を何らかの方法で検知し、そのときの周波数fを読み取ると、その周波数と板厚tは、鉄板中を伝わ

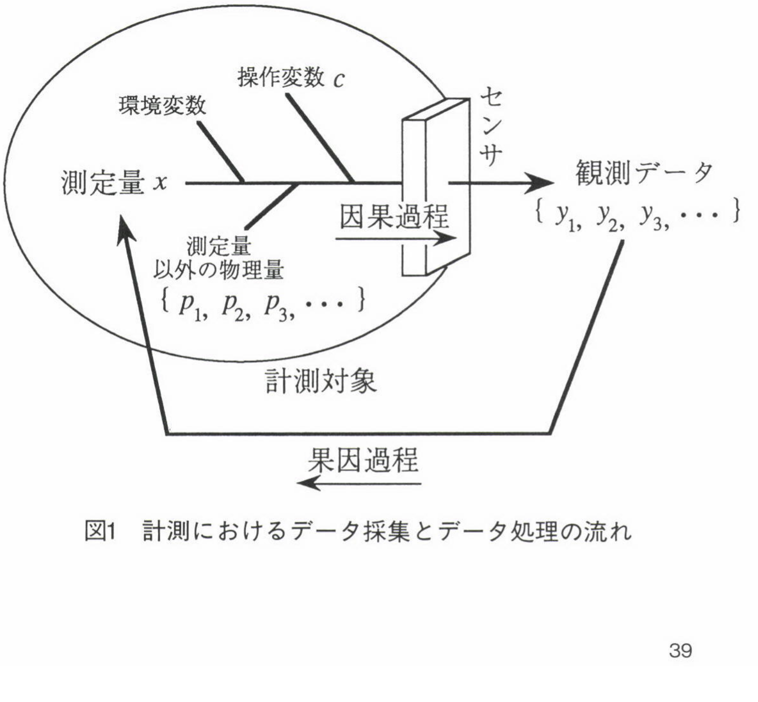

図1　計測におけるデータ採集とデータ処理の流れ

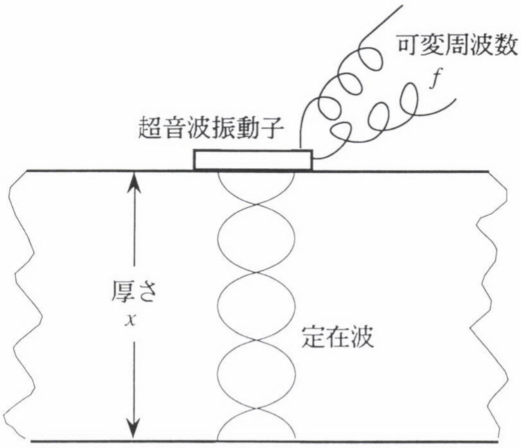

図2　超音波の定在波による板厚の計測

る超音波の伝播速度をv、できた定在波の腹の数をnとして、

$$f=\frac{nv}{2t} \quad \cdots\cdots(1)$$

の関係にある。そこで、この式から板厚tを解けばよいということになるのであるが、定在波の腹の数nは鉄板の中であるから目で数えることができない。伝播速度vも材質によって違うであろうから分からない。そうすると、tもnもvも未知数なのでtを解くことができない。これは数学的にいうと未知数が3つもあって、方程式が1つしかないので不定ということである。そこで方程式を増やしてやることが必要になる。そのためにこの計測システムでは、次に徐々に超音波の周波数を上げていく。そうするといったん定在波が崩れるがあるところまで周波数が上がると次の、腹の数が一つ多い定在波が出現する。このときの周波数をf_2とし、最初の周波数をf_1とすると、

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{nv}{2t} \\ f_2=\dfrac{(n+1)\ v}{2t} \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

という、データf_1、f_2に対して1本ずつの関係式が成り立ち、合せて2本の連立方程式がたつ。したがってもし、伝播速度vが既知とすると、残りの未知数はtとnの2つであるから、この連立方程式を解いて、

$$t=\frac{v}{2\ (f_2-f_1)} \quad \cdots\cdots(3)$$

という答えを得る。同時に、直接数えることのできなかった定在波の腹の数nも

$$n=\frac{f_1}{f_2-f_1} \quad \cdots\cdots(4)$$

と分かるのである。

それでは伝播速度vも未知数として、3つの未知数に対して、もう一つ腹の数の多い定在波に対する周波数f_3を求めて、3本の連立方程式

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{nv}{2t} \\ f_2=\dfrac{(n+1)\ v}{2t} \\ f_3=\dfrac{(n+2)\ v}{2t} \end{cases} \quad \cdots\cdots(5)$$

を立てれば、tとnとvが全部解けるかというと、そうはいかないところが難しい。

このようなとき、同じ材質(したがって伝播速度が同じ)で、板厚の分かっている試料を用いて、同じ計測を行うと、その板厚をt_s、その試料に対するfやnに添え字sを付けて表すと

$$\begin{cases} f_{s1}=\dfrac{n_s v}{2t_s} \\ f_{s2}=\dfrac{(n_s+1)\ v}{2t_s} \end{cases} \quad \cdots\cdots(6)$$

が成り立つ。この式(6)と式(2)の4本を連立させると、すべて解けて

$$t=\frac{f_{s2}-f_{s1}}{f_2-f_1}t_s \quad \cdots\cdots(7)$$

$$v=2\ (f_{s2}-f_{s1})\ t_s \quad \cdots\cdots(8)$$

$$n_s=\frac{f_{s1}}{f_{s2}-f_{s1}} \quad \cdots\cdots(9)$$

を得る。nは(4)式に同じである。この例ではvやn、n_sも求まるのであるが、この計測の目的は板厚tを求めることであったから、式(7)が求まればよいわけで、そのためにはvやn、n_sを消去すればよい。

このように、データを1つ採ると1本の関係式が成り立ち、幾つかのデータを採り、また必要ならば既知の試料についてもデータを採って、連立方程式を立て、不用の変数を消去して、計測したかった量の値を解くというのが計測の一般的な方法である。この際、上の例では定在波の腹の数が1つずつ増えるように操作をしながらデータを採ったように、何らかの人為的な操作を加えながらデータを採るのが普通である。

4 計測と制御の関係

一般に計測対象に操作を加えながらデータを採るといったが、これはデータを採るために計測対象を制御していることになる。その他にも、計測する際に不必要な外乱が加わって消去するべき変数が増えるのを避けるために計測環境を整える制御を行うことも少なくない。したがって計測のために制御が必要である。

逆に、制御を考えよう。制御対象の出力である制御量を目標値に等しくなるように制御する最も基本的な制御系は図3のような構造になる。この系では、制御量の値が目標値より低いときには制御偏差が正になり、それを受けて制御装置が操作量を増やして、制御量を上げようとする。また制御量の値が目標値より高いときには制御偏差が負になり、これを受けて制御装置が操作量を減らして、制御量を下げようとする。このようなことをするために当然ながら制御量の値を知らなければならない。そこで制御量を計測することが必要になる。したがって制御のために計測が必要である。

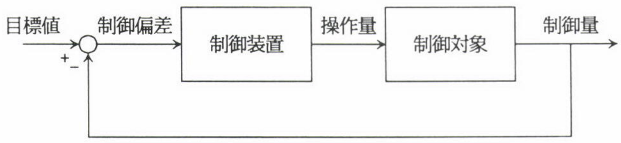

図3　フィードバック制御系の代表的構造

このようなわけで、計測のためには制御が必要であり、また制御のためには計測が必要であり、計測と制御はたがいに不可欠な役割を果たす関係にある。

5 制御のための計測

さて制御のための計測ということを考えると、制御の実行上に必要な計測と制御系を設計するために必要な知識の計測に分けられる。前者の代表的なものが上に述べた制御量であり、フィードバック制御には不可欠である。これをより一般的にいうと制御対象のダイナミックな状態の移り変わりを表現するのに必要にして最小限の表現である状態変数ベクトルのフィードバックであり、状態フィードバックといわれる。このためには状態変数ベクトルを計測しなければならない。この計測を通常“状態観測”あるいは“状態推定”とよんでいる。制御量は状態変数ベクトルの部分情報である。後者の制御系設計に必要な知識で最も重要なのは制御対象の動特性である。この計測を通常“同定”とよんでいる。制御系設計には設計法によって、表2にみるように、その他の知識を必要とするものもある。また、制御対象の動特性の変化に適応しながら制御する適応制御は、制御系の設計を実運転中に自動的に行っているとみることもでき、本質的に同定を制御の実行中にやっていると考えることができる。

6 状態観測

このように制御のための計測としていろいろな問題を考えることができるが、先の入門講座制御技術編でも述べられているので、ここでは計測の方法を明白に見やすい状態観測について述べよう。

状態観測は対象とする動的システムが状態方程式で記述されているという前提で考える。状態方程式表現は動的システムの挙動を記述するのに必要にして最小限の変数の組である状態変数ベクトル（簡単に状態変数あるいは状態などとよぶ）xの時間的変化速度がそのときの状態xとそのときの入力uにどのように影響されるかを記述したものである。線形で時間的に特性の変化しないシステムの場合には

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \cdots\cdots (10)$$

と書かれる。状態xはn個の成分からなっている列ベクトル、入力uはr個（r<n）の成分からなっている列ベクトルと考えている。したがってAはn行n列の正方行列、Bn

表2　制御系設計に際してあらかじめ計測しなければならない諸知識

制御系設計理論	設計上必要とする先験的知識
周波数応答法	制御対象の周波数応答（現実的には非常に低い周波数帯域や非常に高い周波数帯域は計測しなくてもよい）。位相が100°から200°程度遅れる周波数帯域の周波数特性が重要。
PID制御に対するZiegler-Nichols法	制御対象を“むだ時間＋1次遅れ”要素とみなしたむだ時間と時定数、または限界感度と限界周期（位相が180°遅れる点での周波数特性）。
部分的モデルマッチング法	伝達関数行列のマクローリン展開係数の最初の数項。
線形最適レギュレータ*	制御対象の状態方程式。
カルマンフィルターを用いる状態フィードバック系*	制御対象の状態方程式、制御対象の初期状態の平均値と共分散行列、平均値ゼロと仮定された観測ノイズおよびシステムノイズの時差無相関性と共分散行列。初期状態、観測ノイズ、システムノイズの無相関性。
線形最適サーボ系*	制御対象の状態方程式。目標値信号を、入力がゼロで、適当な初期状態から出発する線形動的システムの出力とみなすための、その線形動的システムの状態方程式。
極配置指定法*	制御対象の状態方程式。
Exact Model Matching法*	制御対象の伝達関数行列。
非干渉化*	制御対象の状態方程式。
部分的モデルマッチング法による非干渉制御	伝達関数行列のマクローリン展開係数の最初の数項。
H_∞ロバスト制御*	周波数伝達関数行列およびその変動分。

*：その知識が正しいとして厳密な計算が行われるから正確な知識が要求される。

行r列の矩形行列であり、それぞれシステム行列、入力行列とよばれる。状態xの成分は一般にそのシステムに含まれるエネルギーまたは物質の蓄積要素の数に等しい。したがってnは一般に非常に大きい。センサーを沢山付けて計測しようとしても計りきれるものではない。実際にセンサーを使って計測できる出力yはほんの一部分である。それを

$$y=Cx \quad \cdots\cdots (11)$$

と記述する。出力yはp個（p<n）の成分からなっていると考える。したがってCはp行n列の矩形行列であり、出力行列とよばれる。式（10）は状態方程式、式（11）は出力関係式とよばれるが、両者を区別する必要のないときは合せて状態方程式ということもある。

このようなシステムの記述において、われわれが直接観測できる出力yと入力uから状態xを知ろうとするのが状態観測なのである。イメージが浮かぶように簡単な例で考えよう。状態方程式と出力関係式を

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \cdots\cdots (12)$$

としよう。ここではn＝3、r＝1、p＝2である。ここで出力関係式を成分ごとに書くと

$$y_1=x_1 \quad \cdots\cdots (13)$$

$$y_2=x_1+x_2 \quad \cdots\cdots (14)$$

であるから、x_1、x_2を解くと

$$x_1=y_1 \quad \cdots\cdots (15)$$

$$x_2=y_2-x_1=y_2-y_1 \quad \cdots\cdots (16)$$

となり、状態変数のうちのx_1とx_2はこれで分かってしまう。しかしx_3が分からない。それは解きたい未知数がx_1、x_2、x_3の3つあるのに、出力関係式には観測されるy_1とy_2に対応する2本の式しかないからである。線形連立方程式が解けるためには未知数の数だけは式が要るからである。そこで未知数の関与する式を増やす必要がある。状態方程式が状態xとその導関数との関係を記述した形になっていることに着目し、出力関係式を微分し、$\dot{x}$を状態方程式を使ってxで置換えていくと

$$\dot{y}_1=\dot{x}_1=x_2 \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\dot{y}_2=\dot{x}_1+\dot{x}_2=x_2+x_3 \quad \cdots\cdots (18)$$

を得る。この$\dot{y}_2$の式にはx_3が絡んでいるので、これからx_3を解くと

$$x_3=\dot{y}_2-x_2=\dot{y}_2-(y_2-y_1) \quad \cdots\cdots (19)$$

を得る。これでx_1、x_2、x_3を出力yおよびその導関数から知ることができた。観測できるデータy_1、y_2、$\dot{y}_2$について式が1本ずつ立ち、その連立方程式から状態変数成分が求められることは計測そのものである。

ところで状態方程式が

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \cdots\cdots (20)$$

となっていたらどうであろうか（システム行列の第2行が変っている）。$\dot{y}_2$にx_3が絡んでこないので（$\dot{y}_2$にx_3の情報が入ってこないので）x_3が求まらない。そこでさらに$\ddot{y}_1$、$\ddot{y}_2$を計算してみても一向にx_3が絡んでこない。もっと微分してもだめである。実は行列に関する知識からn次のシステムの場合にn－1階まで微分してだめならそれ以上微分してもだめなのである。このようなときこのシステムは非可観測であるという。それに対して、状態方程式(12)の場合には式（13）、(14)、(18）から

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (21)$$

という、係数行列が逆行列をもつ連立方程式が作れて、これから式（15)、(16)、(19）のように状態変数成分がすべて求まったのである。このような場合にそのシステムは可観測であるという。一般的にいうと行列

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (11.54)$$

から線形独立な行がn本選びだせれば可観測、そうでなければ非可観測となる。

7 状態観測フィルター（状態オブザーバ）

天秤で質量を計測したり、ホイートストーンブリッジで電気抵抗を計測するのとまったく同じ発想で状態観測をすることができる。図4を見ながら天秤で質量を計る場面を

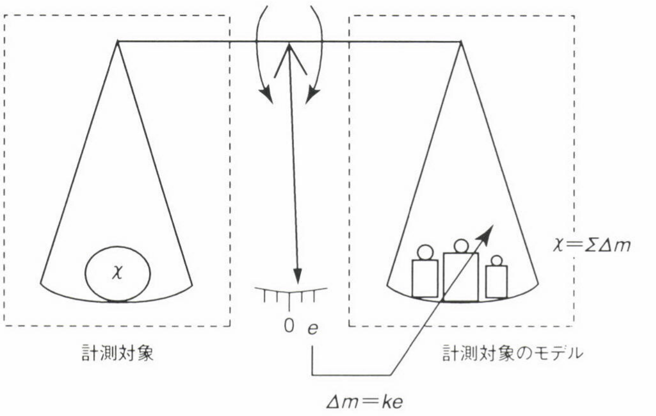

図4　天秤での質量の計測

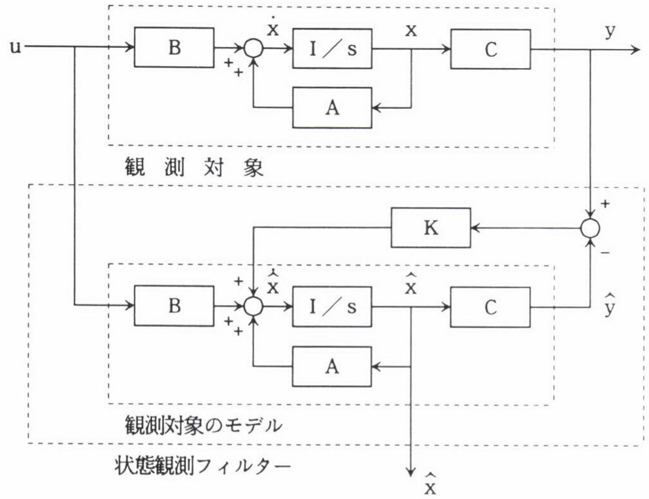

図5　状態観測フィルターの構造

思い出してみよう。天秤は左右対称の構造になっていて、一方の皿（図では左の皿）に質量未知の物体を載せ、反対側の皿には分銅を載せて、両者の支点回りの回転のモーメントが等しくなるように分銅の総和を調節する。両者の回転のモーメントが等しくなり、指針がゼロを指したとき、物体の質量 x は分銅の総和 $\Sigma\Delta m$ であると判断する。この計測システムの特徴は、質量未知の物体を載せた左半分に対して、右半分が同じ構造の、しかし載せる質量を調節できるモデルになっていること、そして両者の質量の違いが指針のゼロからのずれとなって観測でき、そのずれを見て、ずれをゼロにするように分銅を調節できることである。このように、計測対象に対して、それと同じ構造のモデルを用意し、両者の影響の違いを見てモデルを調節し、差がゼロになったとき、計測対象の未知量に対応するモデルの方の値を読みとることによって間接的に計測対象を知ることができる。

この方法を状態方程式で記述されたシステムの状態観測に応用すると図5のような状態観測システムが得られる。

図のように観測対象システムとそっくり同じモデルシステムを用意し、両方に同じ入力 u を加え、両者の出力の差 $y-\hat{y}$ を $\dot{\hat{x}}$ にフィードバックしてやる。このときシステムが可観測であると、フィードバック係数行列 K を適当に選ぶことによって、$\hat{x}$ が x に漸近するようにできるのである。このようにすると観測対象の状態変数 x を直接センサーで検出することができなくても観測対象の出力 y（t）と入力 u（t）を対象システムのモデルからなる“フィルター”に通して x の代用になる $\hat{x}$ を求めることができる。

状態観測の本質は出力関係式から状態変数 x を解きたいのであるが、式の本数が足りないから、式を増やして解けるようにするということである。板厚を計測するときも式の数が足りないので式の数を増やしたのであった。この発想から、出力関係式はすでに p 本の式からなっているので、あと n−p 本だけ式を増やして、n−p 次のフィルターを構成してやることもできる。図5の場合には観測対象のモデルも観測対象と同じであるから n 次のフィルターなのであるが、n−p 次は最小の次数になるから最小次元状態観測フィルター（最小次元オブザーバー）とよばれている。

8 おわりに

計測システムを具体的に構築する場合にはどのようなハードウエアをどのように組合わせていくかということが重要な課題になる。しかしあまり具体的なことに捕らわれると木を見過ぎて山が見えなくなる。また近年物理的演算機構よりもディジタル計算機にデータ処理を委ねることによって、大規模な計測システムも可能になってきている。そのような観点から計測行為の根底に横たわるデータを採り、方程式を立ててそれを解くという構造を明示した。この観点からより多くの客観的な知識獲得の場面が同じ構造になっていることにも気付いてもらえれば幸いである。

参考文献

1）北森俊行：計測の本質と計測工学，計測と制御，26，No.2，145-152（1987.2）
2）北森俊行：センシングにおける逆問題とそのインテリジェンス，システム／制御／情報，35，No.10，585-591（1991.10）
3）藤井克彦：制御技術の歴史と制御理論の発展，「ふぇらむ」，Vol.2，No.1，p.37-43（1997.1）

（1997年2月4日受付）