解説

マイクロメカニックスの発達史

村外志夫 ノースウェスタン大学 土木工学科 名誉教授
Toshio Mura

Introduction to Micromechanics;an Example and Anecdotes

1 はじめに

ソ連邦が人工衛星をアメリカに先立って打上げた時、アメリカはあわてて理工学の研究と大学の拡張をはじめた。ARPAというアメリカ政府機関から大金がNorthwestern Universityに入り、電気でも機械でも土木でも皆力をあわせて材料科学の研究をしろという。猫の手も借りたいという時だった。そこで、小生も材料の微細構造や原子の配列を考慮した材料力学を土木工学科で教えることにして、講義の名をmicromechanicsとした。

Micromechanics of Defects in Solids[1]という本もオランダから出して多少micromechanicsという言葉が世界的に通ずるようになった。小生の友人高橋作太郎君が研究社の新英和大辞典[2]にmicromechanicsを入れ、小生がその和訳を書いた。話が前後するが東京工業大学金属工学科にいた森勉君とも「マイクロメカニックス」を日本の培風館から出した[3]。大変好評だった。東京工業大学の金属工学科で森君が教科書にその本を使い学生をかなりしぼったらしい。森君の学生はマイクロメカニックスのことを「毎苦労迷禍荷苦痛」と書いた。

なお、本誌の編集委員からマイクロメカニックスの応用例やマイクロメカニックスならではの解析効果を書けと言われた。沢山ある。小生の本にそれらをまとめて書いてある[1]。Inclusion問題だけでも、数百の論文が出ている。それらを紹介したReviewもある[4,5]。これらを読めば、どんなことに応用があるかわかる。しかし、一番よいことは、自分で問題を作ることである。そうすると、マイクロメカニックスの有用性が自ずとわかって来る。

2 基本的問題

具体的な問題を示しそれをマイクロメカニックスの方法でどうして解くかを示そう。これさえわかればよいと思いながら書く。

想像力豊かで独創力強靭な学徒がいるとすれば、この具体例の熟慮だけでことが済むかもしれない。

沢山の数式が出て来るが、論理展開をきちっとやるとそうなってしまう。これは仕方がない。しかし、丁寧に読めば、必ずわかるものである。途中をとばして結果だけを書くならば、ハンドブックや公式集を作るのと同じになってしまう。それでは面白くないし、学ぶことも少ない。

Fig. 1の矩形領域に、y軸方向に一様外力σ^0_{22}が働いたとする。(この領域は十分大きいとする。) この一様外力とは、もしその矩形領域がhomogeneousならば勿論領域のいたるところ応力は一定値$\sigma^0_{22}(=\sigma^0)$でその他の応力成分はないということを意味する。Fig. 1の領域は3次元でも2次元でもよい。領域がhomogeneousということは材料が一様であるということで弾性係数が一様でFig. 2に示すようなボイドΩなどないという意味である。Ω内の弾性係数が母相$D-\Omega$の弾性係数と違っている時Ωをinhomogeneity(不均一領域)という。Ωがボイドで扁平な楕円体の形をしていたら、それをクラックという。今はΩがボイドでその中に水

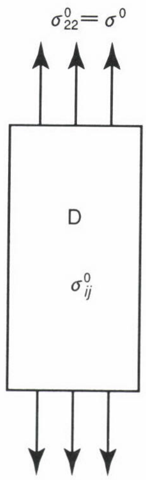

Fig. 1

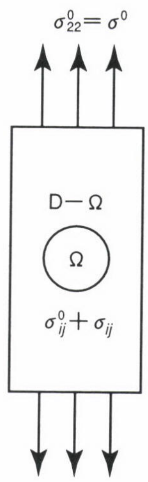

Fig. 2

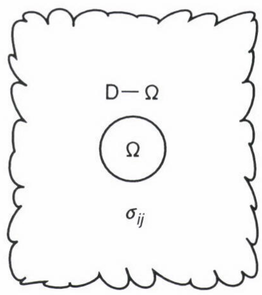

Fig. 3

がつまっている場合を考えよう。inhomogeneityが存在するため矩形領域内の応力は当然Fig. 1の応力分布と異なる。今それを$\sigma^0_{ij}+\sigma_{ij}$とする。$\sigma_{ij}$は以下に述べるようにして簡単にわかり、それをみつける方法をマイクロメカニックスでequivalent inclusion method(等価介在物法)という。今Fig. 3のような無限に広がった弾性体を考え、弾性係数はFig. 1のそれと同一とする。勿論Fig. 2のmatrix D−Ωのそれとも同一な材料とする。但しFig. 2のΩと同一な形をしたFig. 3の部分空間Ωに非弾性歪ε^*_{ij}が一様に分布するとする。Fig. 3のΩはFig. 2のΩと同形で弾性係数はmatrix D−Ωと同一とする。そのようなΩのことをinclusion(介在物)といい、そこに考えたε^*_{ij}のことをeigenstrainという。無限領域Dにその部分領域Ωに分布したε^*_{ij}のために発生する応力をeigenstress或いは内部応力といいσ_{ij}と書く。equivalent inclusion methodとはε^*_{ij}を適当にとると、それによって起こるeigenstress σ_{ij}をFig. 2の応力disturbance(乱れ)σ_{ij}と同一視することができるということである。村[1]の本にΩの形が与えられた時のσ_{ij}をε^*_{ij}の線形結合の形で与えてあるが、ここでは始めから導き出してみよう。一様な弾性係数C^0_{ijkl}の無限に広がった弾性体にeigenstrain ε^*_{ij}が与えられた時できるeigenstress σ_{ij}はHookeの法則から弾性歪$(e_{kl}-\varepsilon^*_{kl})$に比例して

$$\sigma_{ij}=C^0_{ijkl}(e_{kl}-\varepsilon^*_{kl}) \cdots\cdots (1)$$

と書ける。e_{kl}は変位u_iから生ずる歪で

$$e_{kl}=(u_{k,l}+u_{l,k})/2 \cdots\cdots (2)$$

と書ける。$u_{k,l}$とは$\partial u_k/\partial x_l$である。まず、$C^0_{ijkl}$は対称テンソルなので、以下に示すように、$C^0_{ijkl}u_{k,l}$と$C^0_{ijkl}u_{l,k}$とは等しい。

$C^0_{ijkl}u_{k,l}$とは$C^0_{ij11}u_{1,1}+C^0_{ij12}u_{1,2}+C^0_{ij13}u_{1,3}+C^0_{ij21}u_{2,1}+C^0_{ij22}u_{2,2}+C^0_{ij23}u_{2,3}+C^0_{ij31}u_{3,1}+C^0_{ij32}u_{3,2}+C^0_{ij33}u_{3,3}$。ここで$C^0_{ijkl}$の$kl$と$u_{k,l}$の$kl$とが重複している。このように重複したindex(指標)については上記のように1から3まで繰り返して書いて和をとるというテンソルの約束がある。又

$C^0_{ijkl}u_{l,k}$とは$C^0_{ij11}u_{1,1}+C^0_{ij12}u_{2,1}+C^0_{ij13}u_{3,1}+C^0_{ij21}u_{1,2}+C^0_{ij22}u_{2,2}+C^0_{ij23}u_{3,2}+C^0_{ij31}u_{1,3}+C^0_{ij32}u_{2,3}+C^0_{ij33}u_{3,3}$であり$C^0_{ijkl}=C^0_{ijlk}$であるので$C^0_{ijkl}u_{k,l}=C^0_{ijkl}u_{l,k}$がわかる。従って(1)式は

$$\sigma_{ij}=C^0_{ijkl}(u_{k,l}-\varepsilon^*_{kl}) \cdots\cdots (3)$$

と書ける。釣合いの式

$$\sigma_{ij,j}=0 \cdots\cdots (4)$$

に(3)式を代入すると

$$C^0_{ijkl}(u_{k,lj}-\varepsilon^*_{kl,j})=0 \cdots\cdots (5)$$

となる。$-C^0_{ijkl}\varepsilon^*_{kl,j}$を$X_i$と書けば(5)式は

$$C^0_{ijkl}\,u_{k,lj}+X_i=0 \cdots\cdots (6)$$

となりBody force(体積力)X_iが働いた時生じる変位u_kが満足しなければいけない式である。集中力が点$\mathbf{x}'$にx_i方向に単位量だけ働いた時の点$\mathbf{x}$におけるx_k方向の変位u_kをGreen 関数といって、わかっている。それを$G_{ki}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$と書けば[1]

$$G_{ki}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\delta_{ki}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}-\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_i}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cdots\cdots (7)$$

ここではμは無限体の剛性率、νはポアッソン比、δ_{ki}はKroneckerデルタ(kとiが等しい時のみ値が1でその他の場合は0)$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|=\{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3)^2\}^{1/2}$、Body forceが単位の大きさでなく量$X_i$の時の$u_k$は(7)式を$X_i$倍すればよく、

$$u_k(x)=\int G_{ki}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,X_i(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' \cdots\cdots (8)$$

上式の積分領域はX_iが分布する領域で

$$X_i(\mathbf{x}')=-C^0_{ijkl}\varepsilon^*_{kl,j}(\mathbf{x}') \cdots\cdots (9)$$

であるから

$$u_m(\mathbf{x})=-\int_\Omega G_{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,C^0_{ijkl}\varepsilon^*_{kl,j}(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' \cdots\cdots (10)$$

となる。ここで、同一のindexが3回以上現われないよう、indexを変えた。Ω内でε^*_{kl}は一定で$\varepsilon^*_{kl,j}$は0だがΩの外でε^*_{kl}は0なのでΩの境界で$\varepsilon^*_{kl,j}$は無限大になり(10)式は0でない。普通(10)式を部分積分して

$$u_m(x)=-\int_\Omega G_{mi,j}(x-x')\,C^0_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}(x')\,dx' \cdots\cdots (11)$$

と書く。但し

$$-\frac{\partial G_{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial x'_j}=\frac{\partial G_{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial x_j}=G_{mi,j}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \cdots\cdots (12)$$

を用いた。Eshelby[6]は

$$u_{m,n}(x)=-\int_\Omega G_{mi,jn}(x-x')\,C^0_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}(x')\,dx' \cdots\cdots (13)$$

を解析的に計算してε^*_{kl}が一様でΩが楕円体の時

$$e_{mn}=-\frac{1}{2}\int_\Omega\{G_{mi,jn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+G_{ni,jm}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}\,C^0_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}d\mathbf{x}' \cdots\cdots (14)$$

をexplicitに積分して

$$e_{mn}=S_{mnkl}\varepsilon^*_{kl} \cdots\cdots (15)$$

をえた。但しこれは、Ωの中の歪である。S_{mnkl}をEshelby Tensorといい、小生の本に色々な場合(Ωの形のいろいろ)について明示してある[1]。Fig. 3に示したようなΩが球の時には

$$S_{1111}=\frac{3}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{5}+\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{3}$$

$$S_{1122}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{5}-\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{3}$$

$$S_{1133}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{5}-\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{3}$$

$$S_{1212}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{5}+\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{4\pi}{3}$$

で

$$S_{1111}=S_{2222}=S_{3333}=\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)} \quad\cdots\cdots(16)$$

$$S_{1122}=S_{2233}=S_{3311}=S_{1133}=S_{2211}=S_{3322}=\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$$

$$S_{1212}=S_{2323}=S_{3131}=\frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}$$

である。eigenstress $\sigma_{ij}=C_{ijkl}(e_{kl}-\varepsilon^*_{kl})$は

$$\sigma_{11}=-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}$$

$$\sigma_{12}=-2\mu\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{12} \quad\cdots\cdots(17)$$

となる。他の応力成分は(1,2,3)の指標を順に交換して上式から求められる。Fig. 2のΩの中に圧縮性の液体がつまっているならばそのHookeの法則(応力σ^v_{ij}と全歪e^v_{ij}の関係)は、

$$\sigma^v_{11}=K^*(e^v_{11}+e^v_{22}+e^v_{33})$$
$$\sigma^v_{22}=K^*(e^v_{11}+e^v_{22}+e^v_{33})$$
$$\sigma^v_{33}=K^*(e^v_{11}+e^v_{22}+e^v_{33})$$
$$\sigma^v_{12}=\sigma^v_{23}=\sigma^v_{31}=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

と書ける。K^*は体積弾性率、$e^v_{kk}=e^v_{11}+e^v_{22}+e^v_{33}$は体積歪である。液体だから、応力は圧力のみであり、e^v_{kk}が正の時は、$\sigma^v_{11}=\sigma^v_{22}=\sigma^v_{33}=0$となる。つまり、(18)式は$e^v_{kk}\leq 0$の時成立し、$e^v_{kk}>0$の時は、すべての応力成分をゼロとする。

くどいようだが、equivalent inclusion methodとはFig. 2のΩ内の歪と応力はFig. 1の歪と応力とFig. 3の歪と応力との和であることを示すことである。Fig. 1の応力は$\sigma^0_{22}=\sigma^0$他の成分は0なので外力歪e^0_{ij}は、

$$e^0_{11}=-\nu\sigma^0/E$$
$$e^0_{22}=\sigma^0/E$$
$$e^0_{33}=-\nu\sigma^0/E$$
$$e^0_{12}=e^0_{23}=e^0_{31}=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

である。ここでE, νはFig. 1、Fig. 3の一様な材料のヤング率とポアッソン比である。Fig. 1、Fig. 3のinclusion Ω内の歪は、

$$e_{11}=S_{1111}\varepsilon^*_{11}+S_{1122}\varepsilon^*_{22}+S_{1133}\varepsilon^*_{33}=\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}+\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}+\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}$$

$$e_{22}=S_{2211}\varepsilon^*_{11}+S_{2222}\varepsilon^*_{22}+S_{2233}\varepsilon^*_{33}=\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}+\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}+\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}$$

$$e_{33}=\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}+\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}+\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}$$

$$e_{12}=e_{23}=e_{31}=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

である。また、Fig. 3のΩ内の応力は、

$$\sigma_{11}=-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}$$

$$\sigma_{22}=-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}$$

$$\sigma_{33}=-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0 \quad\cdots\cdots(21)$$

である。

次の手続きは、equivalent inclusion methodの考えに則り、Fig. 1の応力とFig. 3のΩ内の応力(21)式の和がFig. 2のΩ内の応力(18)式に等しくなるようにε^*_{ij}を決めることである。そして、ε^*_{ij}を定める式は次のようになる。その前に(20)式から$e_{11}+e_{22}+e_{33}$を計算しておこう。

$$e_{11}+e_{22}+e_{33}=\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\varepsilon^*_{33} \quad\cdots\cdots(22)$$

又、$e^0_{11}+e^0_{22}+e^0_{33}=(1-2\nu)\sigma^0/E$、かつ、$e^v_{ij}=e^0_{ij}+e_{ij}=e^0_{ij}+S_{ijmn}\varepsilon^*_{mn}$である。equivalent inclusion methodはむしろ一般的な式で書いた方がわかりやすい。等価性の必要十分条件はΩ内で、

$$C^*_{ijkl}(e^0_{kl}+e_{kl})=C_{ijkl}(e^0_{kl}+e_{kl}-\varepsilon^*_{kl}) \quad\cdots\cdots(23)$$

即ち、

$$C^*_{ijkl}(e^0_{kl}+S_{klmn}\varepsilon^*_{mn})=C_{ijkl}(e^0_{kl}+S_{klmn}\varepsilon^*_{mn}-\varepsilon^*_{kl}) \quad\cdots\cdots(24)$$

が成立することである。ここでC^*_{ijkl}はFig. 2のinhomogeneity Ωの弾性係数、C_{ijkl}はFig. 2のmatrix D−Ω、又はFig. 1又はFig. 3の弾性係数である。Fig. 2のinhomogeneity Ω内の応力$\sigma^0_{ij}+\sigma_{ij}$は(23)式の左辺であり、それをFig. 3のinclusion Ω内の応力σ_{ij}とFig. 1の応力σ^0_{ij}の和$\sigma^0_{ij}+\sigma_{ij}$とequivalentになるように(23)式の右辺でかく。Fig. 2で示した例題ではC^*_{ijkl}は(18)式にあらわれるように体積弾性率K^*のみでC_{ijkl}はmatrixが等方性の時は(21)式にあらわれるように剛性率μとポアッソン比νである。それで(24)式は次のようになる。

$$\sigma^0_{11}+\sigma_{11}=K^*\{e^0_{11}+e^0_{22}+e^0_{33}+e_{11}+e_{22}+e_{33}\}$$
$$=K^*\{\frac{1-2\nu}{E}\sigma^0+\frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)}(\varepsilon^*_{11}+\varepsilon^*_{22}+\varepsilon^*_{33})\}$$
$$=-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}$$
$$-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33} \quad \cdots\cdots (25\text{-}1)$$

$$\sigma^0_{22}+\sigma_{22}=K^*\{\frac{1-2\nu}{E}\sigma^0+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}(\varepsilon^*_{11}+\varepsilon^*_{22}+\varepsilon^*_{33})\}$$
$$=\sigma^0-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}$$
$$-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11} \quad \cdots\cdots (25\text{-}2)$$

$$\sigma^0_{33}+\sigma_{33}=K^*\{\frac{1-2\nu}{E}\sigma^0+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}(\varepsilon^*_{11}+\varepsilon^*_{22}+\varepsilon^*_{33})\}$$
$$=-\mu\frac{16}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}$$
$$-2\mu\frac{5\nu+1}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22} \quad \cdots\cdots (25\text{-}3)$$

(25-1)−(25-2)：

$$\mu\frac{10\nu-14}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}+\mu\frac{-10\nu+14}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{22}=\sigma^0$$

(25-1)−(25-3)：

$$-\mu\frac{14-10\nu}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{11}+\mu\frac{-10\nu+14}{15(1-\nu)}\varepsilon^*_{33}=0 \quad \cdots\cdots (26)$$

又(25-3)は、

$$\{2K^*\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}+2\mu\frac{5\nu+9}{15(1-\nu)}\}\ \varepsilon^*_{11}$$
$$+\ \{K^*\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}+\mu\frac{10\nu+2}{15(1-\nu)}\}\ \varepsilon^*_{22}=-K^*\frac{(1-2\nu)}{E}\sigma^0$$

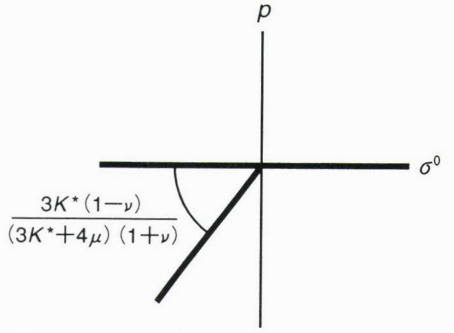

Fig. 4　$p=\sigma^0_{11}+\sigma_{11}=\sigma^0_{22}+\sigma_{22}=\sigma^0_{33}+\sigma_{33}$と$\sigma^0$の関係

これを解いて、

$$\varepsilon^*_{11}=$$
$$\frac{3(1-\nu)(5EK^*+2E\mu+14K^*\mu+5EK^*\nu+10E\mu\nu-38K^*\mu\nu+20K^*\mu\nu^2)\sigma^0}{2E\mu(3K^*+4\mu)(1+\nu)(-7+5\nu)}=\varepsilon^*_{33}$$
$$\varepsilon^*_{22}=\varepsilon^*_{33}+\frac{15(1-\nu)}{\mu(14-10\nu)}\sigma^0 \quad \cdots\cdots (27)$$

を得る。

上の結果を(21)式に代入すれば応力disturbance σ_{ij}がわかり(20)式に代入すれば歪のdisturbance e_{ij}がわかる。Fig. 2のΩ内の応力は(25)式に(27)式を代入すればよく、それは静水圧で次のように簡単になる。

$$P=\sigma^0_{11}+\sigma^0_{11}=\sigma^0_{22}+\sigma_{22}=\sigma^0_{33}+\sigma_{33}$$
$$=\frac{3K^*(1-\nu)\sigma^0}{(3K^*+4\mu)(1+\nu)} \quad \cdots\cdots (28)$$

Fig. 4に、(28)式を図示した。$\sigma^0\leq 0$の場合は、原点を通る勾配$3K^*(1-\nu)/\{(3K^*+4\mu)(1+\nu)\}$の直線である。$\sigma^0>0$の場合は、$e^v_{kk}>0$となるので、$P=0$である。ここで、Ωの中から、物体の外へ水が逃げ得る(負の供給)場合を考える。後述のエネルギーの議論より、この供給(Ωの中の新しいeigenstrainの発生)は、エネルギーの減少をもたらすことがわかる。エネルギーが極小になる時は、Ωの中の水の圧力はゼロとなる。即ち、時間が十分経つと、力は、Fig. 4のσ^0軸と一致する直線となる。また後述の平均歪の考えより、水の逃げが生じると、x_2軸方向に縮むことになる。つまり水を含む多孔性物質の変形は、時間依存を示す。この問題は、小生の学生林文聖(Wen-Sheng Lin)が現在論文にしている。

3 エネルギー

エネルギーは、globalな量なので、それを用いた議論を好まない人も多い。しかし、明解なGriffithのクラックの成長理論に見られるように、極めて有用なものである。マイクロメカニックスの手法を使えば、種々の機械的エネルギーが、容易に求まり、見通しがよくなる。たとえば、以下に示すようにε^*_{ij}に伴う弾性エネルギーは簡単にかける。弾性エネルギーWの定義によれば、

$$W=\frac{1}{2}\int_D \sigma_{ij}(e_{ij}-\varepsilon^*_{ij})\,dx \quad \cdots\cdots (29)$$

である。ここで$e_{ij}-\varepsilon^*_{ij}$は応力$\sigma_{ij}$に対応する弾性歪である。$e_{ij}$は適合歪であって、$u_{i,j}$でおきかえられる。更に、

$$\int_D \sigma_{ij}u_{i,j}dx=\int_{|D|}\sigma_{ij}u_i n_j ds-\int_D \sigma_{ij,j}u_i dx=0 \quad \cdots\cdots (30)$$

となる。なぜなら、内部応力なので、表面｜D｜では面力はゼロ($\sigma_{ij}n_j$on｜D｜)であり、また釣合条件$\sigma_{ij,j}=0$(物体Dのあらゆるところで)があるからである。

従って弾性エネルギー(28)式は、

$$W=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}dx \cdots\cdots(31)$$

となり、σ_{ij}はΩの中で一定なので更に簡単に、

$$W=-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}\Omega \cdots\cdots(32)$$

となる。ここでΩは領域Ωの体積である。

又、Fig. 2の状態のギブスエネルギーFは、

$$F=W-\int_{|D|}\sigma^0_{ij}n_j u_i ds \cdots\cdots(33)$$

と定義され、$\sigma^0_{ij,j}=0$　だから、

$$\int_{|D|}\sigma^0_{ij}n_j u_i ds=\int_D\sigma^0_{ij,j}u_i d\mathbf{x}+\int_D\sigma^0_{ij}u_{i,j}d\mathbf{x}$$

$$=\int_D\sigma^0_{ij}u_{i,j}dx=\int_D\sigma^0_{ij}(u_{i,j}-\varepsilon^*_{ij}+\varepsilon^*_{ij})\,d\mathbf{x} \cdots\cdots(34)$$

また、$\sigma^0_{ij}(u_{i,j}-\varepsilon^*_{ij})=C_{ijkl}u^0_{k,l}(u_{i,j}-\varepsilon^*_{ij})=\sigma_{kl}u^0_{k,l}$

となり、$\int_D\sigma_{kl}u^0_{k,l}d\mathbf{x}=\int_{|D|}\sigma_{kl}u^0_k n_l ds-\int_D\sigma_{kl,l}u^0_k d\mathbf{x}=0$

となるから

$$\int_{|D|}\sigma_{ij}n_j u_i ds=\int_D\sigma^0_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\mathbf{x}=\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}\Omega \text{ で、}$$

$$F=W-\sigma^0_{ij}\varepsilon^*_{ij}\Omega$$
$$=(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}-\sigma^0_{ij}\varepsilon^*_{ij})\,\Omega \cdots\cdots(35)$$

となる。ここで勿論σ_{ij}は(21)式で与えられε^*_{ij}は(27)式で与えられる。inclusion又はinhomogenityを含む相変化(Fracture mechanicsを含む)のたいていの問題は、

$$\delta F=0 \cdots\cdots(36)$$

の条件から決まる。上式は考えている現象のcritical pointはFの極値で定まることを示している。

4 平均値

Fig. 2、Fig. 3で示したeigenstress σ_{ij}を全空間で積分したものは0になる。

$$\int_D\sigma_{ij}d\mathbf{x}=0 \cdots\cdots(37)$$

それを示すために上式を

$$\int_D\sigma_{ik}\delta_{kj}d\mathbf{x}=0 \cdots\cdots(38)$$

と書く。$\delta_{kj}=\partial x_j/\partial x_k$と書けるから、これを部分積分して

$$\int_D\sigma_{ik}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}d\mathbf{x}=\int_{|D|}\sigma_{ik}x_j n_k ds-\int_D\sigma_{ik,k}x_j d\mathbf{x} \cdots\cdots(39)$$

とする。これは0となる。なぜなら釣合条件から$\sigma_{ik,k}=0$、又eigenstressは表面｜D｜で面力を生じないので$\sigma_{ik}n_k=0$を満たす。Fig. 2の境界条件はσ^0_{ij}が満足しσ_{ij}はhomogeneousな境界条件($\sigma_{ij}n_j=0$)である。(1)式と(37)式より

$$C^0_{ijkl}\int_D(e_{kl}-\varepsilon^*_{kl})\,d\mathbf{x}=0 \cdots\cdots(40)$$

$$\int_D(e_{kl}-\varepsilon^*_{kl})\,d\mathbf{x}=0 \cdots\cdots(41)$$

或いは

$$\int_D e_{kl}d\mathbf{x}=\int_{\Omega}\varepsilon^*_{kl}d\mathbf{x}=\varepsilon^*_{kl}\Omega \cdots\cdots(42)$$

である。なぜならε^*_{ij}はΩ内で一定値としているからである。Fig. 2の領域Dの体積をDとして(41)(42)式より

$$\langle e_{kl}\rangle=f\varepsilon^*_{kl}\text{或いは }\langle e^0_{kl}+e_{kl}\rangle=e^0_{kl}+f\varepsilon^*_{kl} \cdots\cdots(43)$$

が得られる。これはe_{kl}のD内の平均値$\langle e_{kl}\rangle$はΩの体積比fに比例するという式で簡明で重要な結果である。eigenstressのmatrix D−Ω内の平均値は(37)式を使って求まる。

$$\int_{D-\Omega}\sigma_{ij}dx+\int_{\Omega}\sigma_{ij}dx=0 \cdots\cdots(44)$$

Fig. 3のΩが楕円体の時はσ_{ij}はΩ内で一定値(今それをσ^∞_{ij}と書く)になるというEshelby[6]の有名な結果を用いて

$$\int_{D-\Omega}\sigma_{ij}d\mathbf{x}=-\sigma^\infty_{ij}\Omega \cdots\cdots(45)$$

が(44)式より求まる。あるいは上式をDでわって

$$\langle\sigma_{ij}\rangle_M=-f\sigma^\infty_{ij} \cdots\cdots(46)$$

$\langle\sigma_{ij}\rangle_M$は$\sigma_{ij}$のmatrix D−Ω内の平均とみなすことができる。MoriとTanaka[7]はFig. 2においてΩと同形のinclusionがもう一つmatrix　D−Ωにある時はその付加されたinclusionにも(46)式なる応力が分布され、それを外からのinclusionの影響又はDがFig. 3でなくFig. 2のように有限物体とした時の境界｜D｜の影響と考えた。それで多くのinclusionsがrandomにありその体積比がfの時matrixの平均eigenstressは(46)式で与えられ、inclusionsの平均eigenstressは

$$\langle\sigma_{ij}\rangle_I=\sigma^\infty_{ij}-f\sigma^\infty_{ij} \cdots\cdots(47)$$

となる。勿論それらは(37)式を満足しなければならなく

$$(1-f)\ \langle\sigma_{ij}\rangle_M+f\ \langle\sigma_{ij}\rangle_I=0 \cdots\cdots(48)$$

となっている。Fig. 2のように外力σ^0_{ij}も付加して考えればmatrixの平均全応力は

$$\langle\sigma_{ij}\rangle_M=\sigma^0_{ij}-f\sigma^\infty_{ij} \quad\cdots\cdots(49)$$

でinclusionsの平均全応力は

$$\langle\sigma_{ij}\rangle_I=\sigma^0_{ij}+(1-f)\sigma^\infty_{ij} \quad\cdots\cdots(50)$$

である。(27)式を(43)式に代入すればFig. 2で示した複合材料の平均的な歪 $\langle e^0_{kl}+e_{kl}\rangle$ と、応力 σ^0の関係が得られる。

5 むすび

「ふぇらむ」誌の編集委員の要求に応じ、マイクロメカニックス発展と日本人のかかわりについて書いてみる。その前に断わっておくことがある。それは、いかなる学問もある特定の人達によって急に生まれるものではないということである。Newton力学でさえもHookeが先にやったとか言われ、発展史がややこしくなる[8]。それで、以下はマイクロメカニックスの発展史という大げさなものでなく、ただ小生がMicromechanics of Defects in Solids(これはMicromechanicsのBibleだとうれしいことを言ってくれる人がいる)を書いたBackgroundを書くことにする。

東京大学第一工学部の応用数学で卒論をThermal stressesということにして林毅先生を指導教官に選んだ。最初に注目した論文はZ.Angew.Math.にでた古典で、H.Reissner[9]のものである。熱応力が生ずるのは熱歪$\alpha\Delta T$が物体内で一様でなくこの空間、ユークリッド空間内で適合しないからだといい、その不適合度をincompatibility(不適合度)といった。同じ教室の森口繁一先生[10]がそのincompatibilityはVolterraのDislocation(転位)であることを示した。その頃東京大学応用数学科では森口先生の論文が火つけ役になり、近藤一夫[11]先生が塑性歪のincompatibilityがRiemann曲率になるといって、リーマン幾何学の応用としてのEinsteinの一般相対論のようなものを展開した。これは、G.I.Taylor[12]の塑性論よりもっと幾何学的で、学術的に見えた。数年後、Bilby等[13]が、近藤先生と同じことを言いだした。Bilbyが彼の大発見を得意になって、一夕dinnerの時Eshelbyに説明した。さすがEshelbyは同じことをすでにして近藤がやっていることを知っていたので、唯一言先生の理論は日本のオリガミの理論に似ていると言った。これは、Bilbyのdinnerをspoilしないようにと気をつかったためだとEshelbyは小生に話してくれた。Bilby[11]等は彼等の論文の最初の頁の脚注に

As this manuscript was being completed, Dr J.D. Eshelby drew the author's attention (24 January 1956) to other independent work (Kondo 1953) in which a discussion of the relation between torsion and 'Burgers vector density' is given, but from a slightly different viewpoint. In this the true and local Burgers vectors are, apparently, not distinguished. The relation of this work to the present treatment will be considered in further papers.

と書いた。それを読まれた近藤先生は、伊豆での応用幾何学同好会の慰安旅行で浴衣がけでくつろいで、我々若いものに俺はこれで世界的に有名になると上機嫌だった。日本の雑誌[11]より、いかにLondonのRoyal Societyの雑誌が国際的であるかを示すもので、小生は複雑な気持ちで聞きながら熱燗を2、3杯口にした。

小生も後になってdynamicに動いているdislocationの記述とそれに伴う応力解析を行ったちょっといい論文[13]を書いた。そこで、Proc.Roy.Soc.LondonにR.Peierlsの紹介で発表した。若い助教授だった小生もその時俺もそのうち教授になれるだろうと思い、アメリカ人の同僚に熱心に自分の理論を説明していた。まさにその時、J.F.Kennedyが暗殺されて外はゴッタがえしていた。小生の同僚は、Presidentが死んだ死んだと小生の話を半分しか聞いていなかった。小生は大学のpresidentが死んだのだと思って意に介さなかった。話は前後するがRoyal Soc.Londonに論文を載せる時にはSocのFellowの紹介がいる。Peierlsは最近はあまり転位論はやっていないので友人のA.H.Cottrellに頼んだと言ったがCottrellが紹介者になり論文はacceptされてProc.Roy.Soc.Londonに印刷された[14]。最近になってR.Peierls[15]の渡り鳥という自叙伝を感慨をこめて読んだ。彼はその中で、いい問題を提供することが難しく、問題を解くことはそんなに難しいことではないと言っている。これは寺田寅彦[16]の「科学者の頭のいいわるいは大変難しいことで、むしろ悪いのがいいのではないか」という名言とともに小生の大事な人生教訓になっている。

参考文献

1) Toshio Mura: Micromechanics of Defects in Solids, Second, revised edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1987).

2) Kenkyusha's English-Japanese Dictionary for the General Reader ; An Encyclopedic Supplement, ed. by T.Matsuda, Kenkyusha, (1994).

3) 村 外志夫, 森勉：マイクロメカニックス, 培風館, (1976).

4) T.Mura： Inclusion Problems, Appl.mech.Rev., 41 (1988), 15-20.

5) T.Mura, H.M.Sodja and Y.Hirose: Inclusion Problem (II), Appl.mech Rev., 49(1996), S118-S127.

6）J.D.Eshelby:The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proc.Roy.Soc, A241(1957), 376-396.
7）T.Mori and K.Tanaka：Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Act.Metall, 21(1973), 571-754.
8）島尾永康：ニュートン，岩波新書，(1979)；
中島秀人，ロバート・フック：ニュートンに消された男，朝日新聞社，(1996).
9）H.Reissner:Eigenspannungen und Eigen spannungs gellen. Z.angew, Math., Mech., 11(1931), 1-8.
10) S.Moriguti:Fundamental theory of dislocation in an elastic body, 応用数学，力学 1 (1947)，29-36.
11) K.Kondo：A proposal of a new theory concerning the yielding of materials based on Riemannian geometry, J.Japan Soc. Appl.Mech., 2(1949), 123-151.
Proc.2nd Japan National Congress for Applied Mechanics, (1952), 41-47.
12) G.I.Taylor:Plastic strain in metals, J.Int. Metals, 62(1938), 307-324.
13) B.A.Bilby, R.Bullough and E.Smith:Continuous distributions of dislocations, A new application of the methods of non-Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc.London, A231(1955), 263-273.
B.A.Bilby and E.Smith:Continuous distributions of dislocations, Proc.Roy.Soc.London, A236(1956), 481-505.
14) T.Mura:Periodic distribution of moving dislocations, Proc.Roy.Soc.London, A280(1964), 528-544.
15) R.Peierls:Bird of Passage-Recollections of a physicist, Princeton University Press, (1985).
16) 寺田寅彦：科学者とあたま，寺田寅彦全集八巻，岩波書店，(1961)，51-56.

(1997年1月7日受付)