解説

形の科学と界面の数理

高木隆司　東京農工大学 機械システム工学科 教授
Ryuji Takaki

Science of Form and Mathematical Analysis of Interface

1 はしがき ―人は形から何を読みとるか

私たちが自然に親しむ、あるいは自然を研究しようとするとき、対象物のどんな属性に着目するだろうか。昔からしばしば着目されてきた属性には、数、大きさ、形、重さ、時間（あるいは速さ）等がある。これらのうち、数、大きさ、重さ、時間は、1次元的な量であり、1個の数字で表現できる。それらは、数学的にも扱いやすいし、異なる対象物について同じ座標軸上で比較できる。したがって、近代科学において、これらの量は自然を理解する際の中心的な位置を占めてきた。

一方、結晶学、解剖学、生物の形態学、地形学、冶金学等においては、「形」が研究対象にされてきた。しかし、これらの分野でも、対称をスケッチしたり、形の特徴を定性的に述べるにとどまることが多かった。したがって、形の研究は近代科学の主流にはなりにくかった。

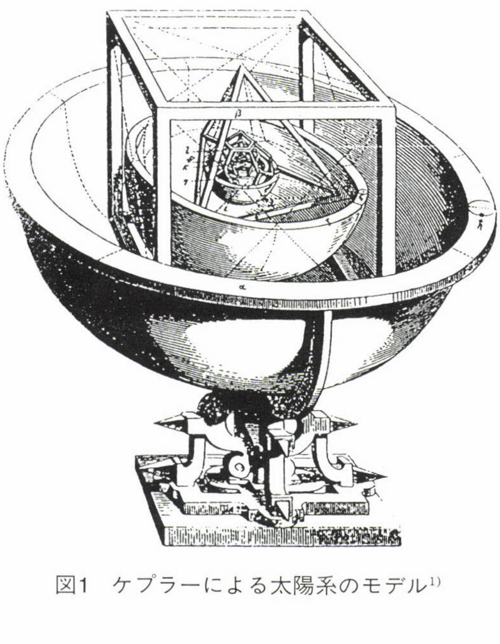


図1　ケプラーによる太陽系のモデル[1)]

ところで、定量的に扱いにくいとはいえ、「形」は非常に多くの自由度を持つ。また、どんなに複雑な形も私たちは即座に認識できる。私たちが眼という非常に優れた形のセンサーを持っていることを考えると、形を媒介とした学問体系を発達させることは自然ななりゆきである。形が重要な役割を演じることによって成立する学問を、「形の科学」と呼んでおこう。そのうち、数理的な内容を含む部分が「形の数理」である。

近代科学において、形が重要な要因になって大発見にいたった例がいくつかある。その代表的な例を、2つほど紹介しよう。

ドイツの天文学者ケプラーは、惑星の数が6個であることと、プラトンの正多面体の数が5個であることのあいだになんらかの関係を見いだそうとして、図1のような太陽系のモデルを考えだした。球面に正6面体を内接させ、それに第2の球面を内接させ、それに正4面体を内接させ、……と続けて、最も内側の球面まで考えると、全部で6個の球面ができる。それらの半径比を計算すると、惑星軌道の半径比とかなりの精度で一致したのである。この発見に神の啓示を感じて、彼の処女作「宇宙の神秘」が生まれた[1)]。

この発見は、後にケプラーをティコ・ブラーエのもとに向かわせ、ついには惑星の楕円軌道の発見に至るのである。彼の太陽系のモデルはまったく無意味なものとはいえ、形の研究が世紀の大発見を導いたと言ってもよいのである。

ドイツの地球物理学者ウェーゲナーは、地殻が定常不変のものであるという固定観念を撃ち破って、1912年に大陸移動説を唱えた。南北アメリカ、アフリカの海岸線の形から、地殻が移動したという結論を導き、これが現代のプレートテクトニクスに発展したことはあまりにも有名である（もっとも、イギリスの哲学者F.ベーコンも海岸線の一致に着目していたらしい）。大陸移動説は、発表当時は注目さ

れなかった。一方、寺田寅彦は、発表直後からその真実性を直感し、日本に紹介したとのことである。大陸移動説は、形の研究が大発見を生み出したという意味で、形の科学のハイライトであった。

最近、形、あるいはパターンに関する関心が徐々に高まりつつある。その原因は、形の研究の潜在的な重要性が認識され始めたこと、20世紀に栄えた微視的世界の科学が一段落し、科学者の眼が巨視的な現象に向き始めたこと、電子計算機の発達によって複雑な形の解析が容易になってきたことが挙げられる。

筆者は、数年前「形態形成の科学的研究」という課題のもとに、文部省の科学研究費補助金を交付され、総合研究を遂行した。その成果が後に単行本「形の数理」になった[2)]。形の数理一般については、この書物を参照されたい。以下では、まず形の科学の全容を簡単に説明した後、主として界面の形にしぼって形の数理とは何かということを述べていく。

2 形の科学とは何か

筆者は、拙著「巻き貝はなぜらせん形か」の中[3)]で、形の科学の定義や、現代の科学における位置づけについて述べた。以下は、その要点である。形の科学（形の数理）は次の4つの分野からなる。

(1)　空間の性質の研究

これは、空間を分割したときの要素の形、空間に要素を充塡するときの分布の性質等、幾何学の応用と言ってよい。要素の配列が不規則である場合は、形について統計的な処理をしなければならないので、幾何統計学という統計学の一分野を応用することになる[4)]。空間の性質の研究は、準結晶、アモルファス、コンクリート、合金のような複合材料の構造、地域における施設の最適配置、動物の縄張りの研究、宇宙における構造物の設計、等の分野に応用される。なお、準結晶とは、数理的な遊びとして普及しているペンローズタイリングのように、完全に一意的に決定されるが、決して周期的でないような原子配列を持つ物質である[5)]。

(2)　形の形成機構の研究

形がどのような仕組みでできあがるかという問題を扱うもので、物理、生物、社会機構、等、いろいろな分野で問題にされる。これらの研究は、本来それぞれの分野の方法論で取り組まれている。しかし、方法論に共通性があり、分野を越えた共同研究が可能である。方法論の共通性に関する代表例として、樹枝状結晶、粘性突起、拡散律則凝集の類似性について第3節で触れよう。

(3)　形の計測

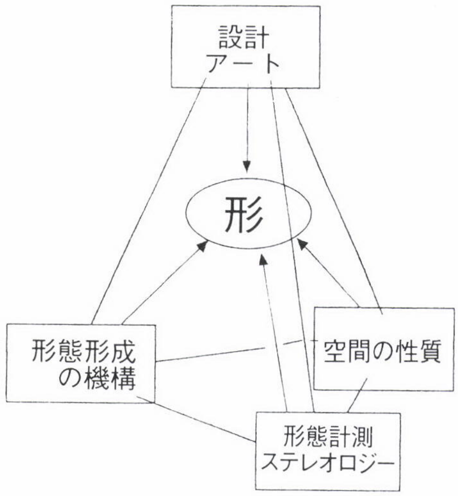


図2　形の科学の分野と目的

形の計測は、本来は光学機器の応用や、画像データの解析に関する技術である。しかし、より高度な計測をおこなうには、形に関する基本的な知識や概念を把握しておくことが必要である。このような基本的な研究分野として、1960年頃から発達したステレオロジーがある[6,7)]。この学問は、生体組織や合金の顕微鏡写真のような2次元断面の情報から3次元構造を推定する技術として出発した。最近は、形態と機能の橋渡しをする学問と考えて、ステレオロジーを一般化する傾向が現れている。

(4)　形の表現と創造

形の研究を、形の表現方法、形の創造に結びつける方法に結びつける分野がこれである。アート、デザイン、建築などにも対応するので、研究ばかりでなく、造形活動も含まれる。たとえば、最近の機械工学のなかに、感性設計という動きが出はじめている。筆者は、日本機械学会主催の感性設計に関する講習会に招かれて講演をしたことがある。そのとき、大きな熱気を感じた覚えがある[8)]。

以上の4つの分野が、図2に示したように、互いに関連し合って形の理解に向かうというのが、形の科学の目的である。

3 界面の形の動力学

異種物質間の界面には、界面張力、拡散や吸着などの物質移動、熱伝達や潜熱の発生など、さまざまな現象が起きる。これらの現象の微視的な機構の研究は、界面化学（あるいは界面科学）に属する。形の科学として界面に着目するときは、界面の微視的な性質を考慮した上で、巨視的な界面形状、あるいはその変化を問題にする。このような観

点から、興味ある話題を紹介しよう。

3.1 成長形の解析

熱平衡からはずれた条件の下で、絶えず成長するときに現れる形を成長形と呼んでいる。その対極は平衡形である。たとえば、シャボン膜の形は平衡形、雪の樹枝状結晶は成長形である。

形の科学においては、樹枝状結晶、粘性突起（viscous finger)、拡散律則凝集（diffusion limited aggregation、DLAと略記される）という類似の成長形があり、これらは統一的に理解されている（図3参照)。

粘性突起とは、高粘性率の液体を満たした多孔質物質、あるいは狭い平板の間を、低粘性率の液体や気体が圧力に押されて広がっていくときに、それらの界面が樹枝状に成長する現象である。拡散律則凝集とは、溶媒中を拡散してきた粒子が次々と付着することにより、不規則な形を持つ凝集体が形成される現象である。

これらは、成長の過程で現れるという点で共通しているし、それらを理論的に解析するときに用いる支配方程式も互いに似ているのである[2)]。結晶は、空気中を拡散してきた蒸気が、結晶表面に結合することにより成長する。それに伴って潜熱が放出され、熱が周囲に伝達される。したがって、界面付近の温度には熱伝導方程式を用い、界面におけるエネルギー保存、および界面の融点温度が界面の曲率に依存するというギッブス-トムソンの関係式を仮定する。雪の結晶の場合は、6個の方向に成長が速いという水分子の性質も取り入れる。

粘性突起を理論的に解析するときは、高粘性率液体中の圧力分布を支配するラプラス方程式（熱伝導方程式の時間微分がない場合)、および界面における曲率と圧力差の関係を基にする。拡散律則凝集では、粒子の拡散方程式、凝集体表面で粒子密度が0になる（必ず付着する）という条件を課する。この場合は、界面の曲率は重要ではない。

このように、これら3つの現象を支配する機構は互いに似ている。一方、支配方程式にわずかな相違点もあり、そのために図3に示した形も少しずつ異なるのである。

3.2 その他の界面運動

高温度で2種類の物質を溶融しておいて、急激に冷却すると(物質によっては加熱することもある)、相分離が起きて、そのパターンが時間的に発展することがある。これをスピノーダル分解と呼んでいる[12,13)]。

観察によると、まず微視的なスケールで相分離が起き、各相が合併することによりだんだんスケールが大きくなる。そのとき、相の界面は乱雑な形状を持っているが、時間とともにスケールを変換していくと、統計的には常に同じようなパターンが現れているというものである（図4参照)。

この現象は、多くの物質に共通に存在し、ギンツブルグ-ランダウ方程式と呼ばれるかなり普遍的な偏微分方程式を用いて解析されている。詳細は省略するが、界面の各部分が、局所的な曲率に比例する速度で法線方向に移動するという性質が導かれることを指摘しておく。

もう一つ、巨視的な流れに生じる界面運動を紹介しよう。異なる速度で平行に流れている2つの流れが、1つの界面で接しているとき、界面が変形して渦の列に発達することが、以前から知られている。渦の間隔が不均一であれば、そのなかでも近い渦同士が合併して、大きな渦が誕生する。この過程によって、渦列を含む流体層はしだいに厚くなっていく。渦があると、両側の流体はよく混ざる。したがって、この渦列の成長は流体の混合過程を支配すると言えるのである。[14)]固体金属同士の接触面でも、もし強いずれがあれば、同様の混合が起きる可能性がある。

ここで紹介した3つの例、成長形、スピノーダル分解、および渦列成長には、自己相似という性質がある。すなわち、一部を拡大しても元と同じような形になっているというものである。もっとも、変化する形はすべて自己相似で

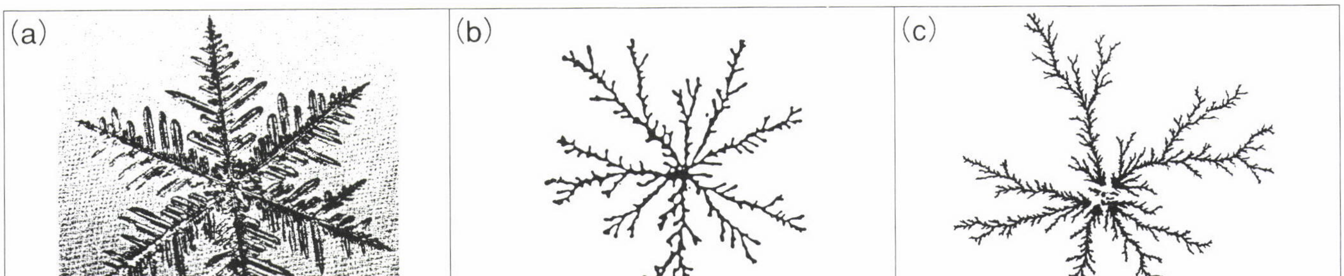


図3　類似した成長形
(a)雪の樹枝状結晶[9)]　(b)粘性突起[10)]　(c)拡散律則凝集[11)]

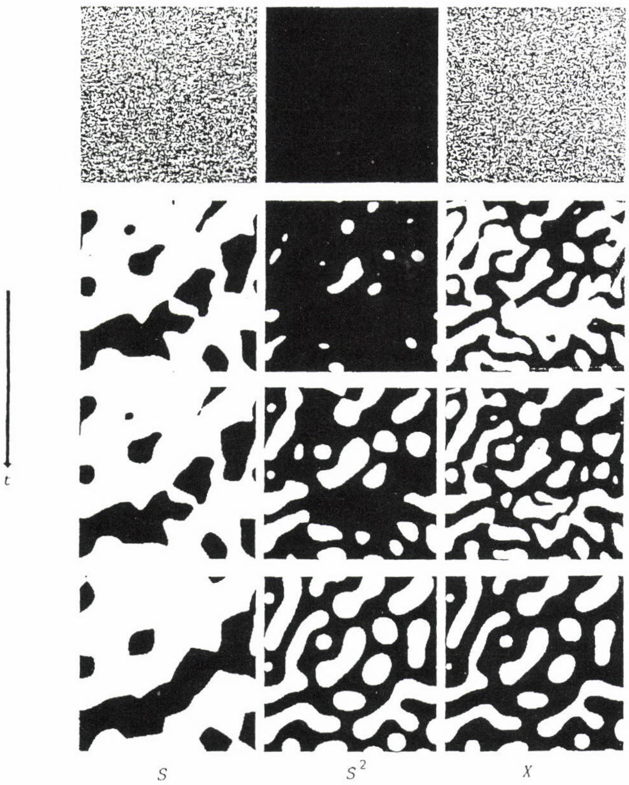
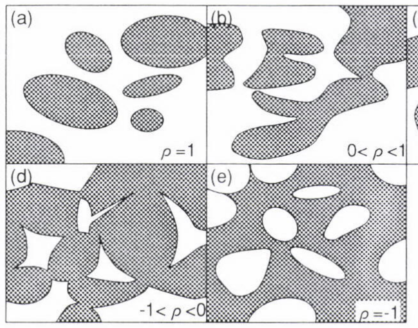


図4　スピノーダル分解の数値シミュレーション[13)]



(a)孤立した凸図形
(b)凹部を含む孤立した図形
(c)孤立した図形と孤立した穴の混在
(d)凹部を含む孤立した穴
(e)孤立した凸形の穴

図5　連結性パラメーターρの値

あるとは言えない。しかしながら、自己相似性を持つ形は興味を引くので、しばしば研究の対象になるのである。

4 界面の形の計測

ものの形を実験的に研究する際には、まずその形を計測することから始めねばならない。そこでは、形の特徴を表す量を抽出することが必要になる。

いままで扱われてきた形の主な特徴量を、５つに分類して下に列挙しよう。

サイズと比	(大きさ、面積、体積、充填率、アスペクト比、曲率、等)
トポロジー	(連結性、貫通する穴の数、からみあいの程度、等)
複雑さ	(図形の不規則性、対称面の数、サイズ分布の分散、等)
フラクタル性	(フラクタル次元、フラクタル性を持つサイズ領域、等)
分岐の特徴	(分岐比、流域面積比、勾配比、等)

これらのうち、サイズや比に関する量は、もっとも理解しやすく、形の計測において多く採用されている。たとえば、粒子が空間を充填する体積の割合である充填率や、３次元物体の表面積と体積の比（その物体の凹凸の多さを表す）はよく使われる。

トポロジーに関する量は、形の本質的な側面だけを抽出したものと言える。たとえば、連結性とは、多数の要素の連結や分離の程度を示す量であり、合金、生体組織、地質等の組織の特徴を表す。その数学的な定義は文献15)を参照していただきたい。ここでは、連結性を表すパラメーターρの値が、図５に示すように、注目する物質部分のつながり方によって－１から＋１までの値をとることを指摘しておく。

図形の複雑さはなかなか定義しにくいので、その試みは多くはない。詳細は文献2)を参照されたい。フラクタルについては、参考書が多いのでここでは省略しよう。分岐の特徴に関する量は、主として河川の形について開発されたものである[2)]。

第２節でステレオロジーについて言及した。初期のステレオロジーの成果の一つに、空間に分布する粒子のサイズ分布を推定する公式がある[6,7)]。空間内の１つの断面で、粒子の直径分布や面積分布、あるいは断面内に引いた直線が粒子によって切りとられる線分の長さ分布が与えられたとき、それらから粒子の半径分布を推定する公式である。現在は、上記の形の特徴量の計測も含めて、ステレオロジーはもっと広く解釈されている。詳細は、最近の解説を参照されたい[16)]。

5 終わりに

形の科学は、まだ完全に一人立ちするまでに成長していない。諸分野の境界領域とみなされ、研究者たちが集まって情報交換や共同研究を行うという状態である。これらの研究者の努力によって、形の科学は物理学や情報科学とな

らぶ位置に来るであろう。

このような情勢を反映して、1985年に日本で「形の科学会」という学会が誕生した。この学会に関する問い合わせは、筆者宛お願いしたい。連絡先は下記の通りである。

〒184-8588 小金井市中町2-24-16
東京農工大学 機械システム工学科　高木隆司
phone: 0423-88-7224　fax: 0423-85-7204
E-mail:takaki@cc.tuat.ac.jp

参考文献

1) ヨハネス・ケプラー：宇宙の神秘，工作舎，(1982)
2) 高木隆司：形の数理，朝倉書店，(1992)
3) 高木隆司：巻き貝はなぜらせん形か，講談社ブルーバックス，(1997)
4) F. L. トート：配置の問題，みすず書房，(1983)
5) 伊藤邦明，小川　泰，他：かたちの科学，朝倉書店，(1987)
6) R. T. デホッフ，F. N. ラインズ：計量形態学，内田老鶴圃，(1962)
7) 諏訪紀夫：定量形態学，岩波書店，(1977)
8) 高木隆司：形と感性，講習会「時代をとらえる感性応用設計の基礎」，(1996) 11月
9) 黒田登志雄：結晶は生きている，サイエンス社，(1984)
10) G. M. Homsy : Viscous fingering in porous media, Ann. Rev. Fluid Mech., 19 (1984), 271.
11) M. Matsushita et al.: Phys. Rev. Lett., 53 (1984), 286.
12) 川崎恭治：日本物理学会誌，38 (1983) 12, 919.
13) K. Shiyama, H. Ninomiya and T. Eguchi : Evolution of antiphase ordered domain structure and phase separation activated by ordering, in Research of Pattern Formation, ed. by R. Takaki, KTK Scientific Publishers, (1994), 441.
14) 高木隆司，佐野　理：ながれ(日本流体力学会誌)，7 (1988) 3, 212.
15) 高木隆司，新井洋二：濃度分布の連結性解析，第32回通研シンポジウム「統計物理学と情報科学」報告書，(1995), 125.
16) 高橋　徹，千場良司：形を計る―ステレオロジーの展開，科学，岩波書店，62 (1992), 786.

(1997年11月7日受付)