解説

最近のウェーヴレット研究の動向

榊原　進　いわき明星大学　理工学部
機械工学科　教授
Susumu Sakakibara

Recent Status of Wavelet Research

1 はじめに

ウェーヴレットとは局在する波を表す関数を一つ固定し、これを縦横に伸縮したり平行移動したりして得られる一連の関数族のことである。実体としての波ではなく数学的な道具としての波で、関数解析、信号解析、信号処理、数値計算などに広く利用されている。

ウェーヴレットとして一つ選んだ関数をマザー・ウェーヴレット、またはアナライジング・ウェーヴレットと呼ぶ。図1(左)に示すのは、ガウス型の窓で振幅変調した複素正弦波であるガボール関数の実部であるが、図(右)にはこれをマザー・ウェーヴレットとして作ったウェーヴレットの一例を示す。

ウェーヴレットの線型結合として表すことにより、信号をウェーヴレット関数の持つ特徴を手がかりに調べることができる。ウェーヴレットはすべて一種の相似変換であるから展開に余分な構造が持ち込まれることがなく、ウェーヴレット関数の特徴を最大限に利用できるのである。また、ウェーヴレットを離散的に配置して信号を表す場合には、局所的な基底関数であるウェーヴレットが多重解像度解析と呼ばれる極めて特徴的な構造に配置されるが、これもこの解析法の大きな特徴となる。ウェーヴレットに対応して1つのディジタルフィルタが決まり、離散ウェーヴレット変換はディジタルフィルタによる信号処理として実現されるので、実際の計算には既存の技術が大いに役立つことも、ウェーヴレット解析が使いやすい理由の一つであろう。

マザー・ウェーヴレットとして用いられる関数は、図1のガボール関数だけでなく、目的に応じてさまざまなウェーヴレット関数が作られている。図2に示すのは直交ウェーヴレットとして知られている最も有名なドーブシーの関数の1つで、左のスケーリング関数と右のウェーヴレット関数との組で現れる。

信号をウェーヴレットの線形結合で表すときの展開係数の組をウェーヴレット変換という。ウェーヴレットが局所的な波であることから、ウェーヴレット変換では従来のフーリエ変換では困難とされた過渡現象を効率的に捉えることができ、この特徴を生かしてさまざまな応用が試みられている。本稿ではウェーヴレットの発展の経緯を簡単に振り返り、最近のウェーヴレット応用研究の動向までを概観することにしたい。

2 連続ウェーヴレット変換

1982年頃、フランスの石油探査技師モーレー(J. Morlet)らが考案し、人工地震による反射波の解析に使ったのが現在のウェーヴレットブームの起源とされる。1984年頃モー

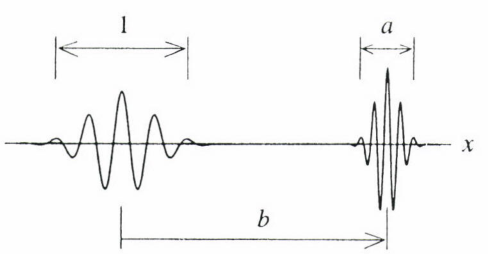

図1　ガボール関数の実部(左)とそのウェーヴレット(右)

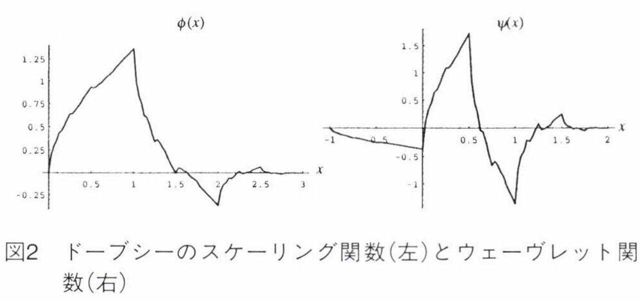

図2　ドーブシーのスケーリング関数(左)とウェーヴレット関数(右)

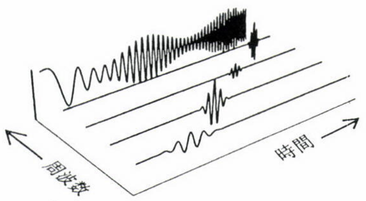

図3　ウェーヴレット変換における信号の表現

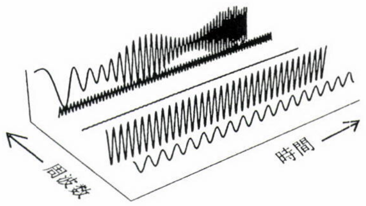

図4　フーリエ変換における信号の表現

レーとグロスマン(A. Grossmann)はウェーヴレット変換をフーリエ変換と同様な積分変換として数学的に定式化した。図3にこの方法で信号を表す様子を模式的に示す。一番奥の信号を手前のウェーヴレットの集まりで表している。図4はフーリエ変換に対応する模式図である。ウェーヴレット関数が局所的であるから、ウェーヴレット変換においては信号を時間・周波数の両面から見ること、すなわち時間・周波数解析が可能となる。

どんな周期関数もその周期の整数分の一の周期の正弦波の和として表すことができるという事実は1807年にフーリエ(J. Fourier)によって示された。これは信号を周波数という観点から特徴づけるだけでなく、信号の滑らかさを特徴づける性質も持っている。たとえば、値にジャンプのある信号のn番目のフーリエ係数c_nの大きさ$|c_n|$はnに反比例し、連続でも折れ曲がっている信号では$|c_n|$はn^2に反比例する。ジャンプや折れ曲がりという局所的な性質は、$|c_n|$のn依存性、すなわち大域的な性質と結びついている。一般に、局所的な信号の性質はフーリエ変換では大域的な性質に現れ、またその逆も成り立つ。このような極めて特徴的な性質のために、信号の性質を調べるのにフーリエ変換は不可欠なものとなっている。

しかし、局所的な特徴が大域的に広がってしまうという性質は、その特徴の存在する位置を特定しようという応用には適さない。この欠点は、フーリエ変換に使われる無限の広がりを持った正弦波を局在する波で置き換えることによって解消される。ウェーヴレットの元になるこのアイデアはすでに古くからさまざまに試みられていた。1946年にガボール(D. Gabor)は図1に示す関数を用いて信号を表し、図5に示すような短時間フーリエ変換と呼ばれる時間・周波数解析を得ていた。

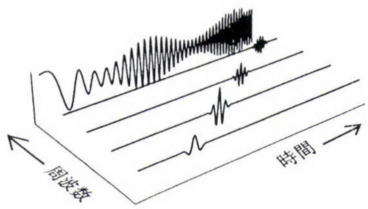

図5　短時間フーリエ変換における信号の表現

3 直交基底

図3のウェーヴレット変換では、変調する正弦波の周波数に合わせて窓の幅も変えているが、図5の短時間フーリエ変換では、ガウス型の窓の幅は固定し変調する正弦波の周波数だけを変えている。この結果、信号の低周波成分の分解能が悪くなるが、これは図からもわかる。図からはわかり難いが重要な事実は、フーリエ変換では正弦波が信号の直交基底を成していることで、これはガボール関数では成り立たない。直交基底であれば、展開係数は一意的に決まり、またその計算法も簡単であるから、応用上効率がよい。もっと正確に言えば、日常的な応用において計算効率は必須である。それを認識するには、離散フーリエ変換の実際的な応用は、1965年にクーリー(J. Cooley)とチューキー(J. Tukey)によって発見された高速計算法であるFFTによって日常的なものとなったことに注意すれば十分であろう。

こうして、局在する、できればコンパクト・サポートの(有限の区間の外では値が0である)直交基底を成すウェーヴレットが望まれる。実際、そのような関数は1910年頃ハール(A. Haar)によって作られた。図6(右)に示すのがそれ

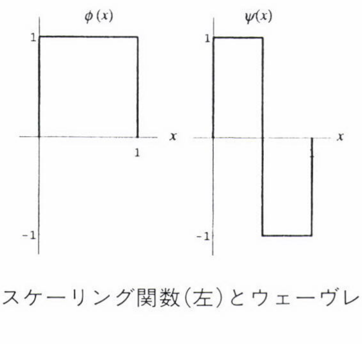

図6　Haarのスケーリング関数(左)とウェーヴレット関数(右)

で、図(左)のグラフは今日ハールのスケーリング関数と呼ばれる関数である。これらの関数は構造が簡単なためさまざまな議論に例としてよく使われるが、連続関数でないので連続な信号を表すのには効率が悪い。図2のような、連続でコンパクト・サポートの直交ウェーヴレットが作られるまでには、さらに80年ほどの時間が必要であった。1980年にシュトロームベルク(J. Strömberg)は連続な直交ウェーヴレットを作ったが、これはコンパクト・サポートでない。

今日のウェーヴレット理論の構築に重要な役割を果たしたのは、フランスの数学者メイエ(Y. Meyer)である。関数解析の専門家である彼は1985年に偶然グロスマンの論文を知り、ウェーヴレットをさまざまな観点から研究することになった。かれはまず連続でコンパクト・サポートの直交ウェーヴレットは存在しないことを証明しようとして、逆にそれを作ってしまった。厳密には、メイエ・ウェーヴレットは周波数領域でコンパクト・サポートであるが、これは初めて作られたコンパクト・サポートの直交ウェーヴレットであった。

4 多重解像度解析

信号処理の分野では数学上の発展とは独立に、その後のウェーヴレット理論に貢献するいくつかのアイデアが生まれていた。1980年頃ガラン(C. Galand)は、エステバン(D. Esteban)らと共同で開発したクァドレチャーミラー・フィルタ(QMF)を使って、信号の帯域をいくつかのサブバンドに分ける方法を考えた。信号を送受信するときに圧縮して効率化を図るものであった。

また、画像処理においてバート(P. J. Burt)とエイデルソン(E. H. Adelson)は1983年にラプラシアン・ピラミッドと呼ばれるアルゴリズムを考えた。たとえば512×512ピクセルの画像で、それぞれの2×2ピクセルの画像の値の平均値をとって、これを1ピクセルに割り当てれば256×256ピクセルの画像が得られる。こうして得られた縦横半分の大きさの画像は、元の画像の粗い近似になっている。この手続きはまったく同様な手順で繰り返すことができ、128×128ピクセルの画像、64×64ピクセルの画像、と1段階ごとに解像度を下げていくことができる。これら一連の画像は多重解像度の構造を持っているわけである。

シュトロームベルクのウェーヴレットもこの多重解像度の性質を持っている。さらに、サブバンド符号化も結局は同様の構造を持っており、つまりこれらはすべて多重解像度という観点からは同じものである。この事実に気付いたのは当時23歳の大学院生であったマラー(S. Mallat)で

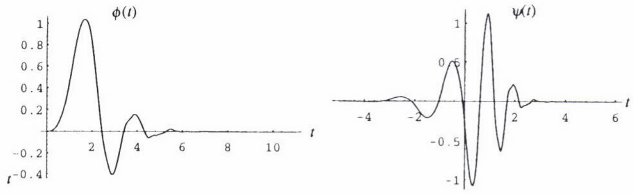

図7　ドーブシー$N=6$のスケーリング関数(左)とウェーヴレット関数(右)

あった。かれはその後メイエの助けを得て1985年から89年にかけて多重解像度解析の概念を確立した。トゥー・スケール関係を満たすスケーリング関数を使って、多重解像度解析を数学的に定式化し、信号の展開係数を計算するMallatアルゴリズムが作られたが、これは今日一般に離散ウェーヴレット変換と呼ばれている。

そして1988年には、連続でコンパクト・サポートの直交ウェーヴレットがドーブシー(I. Daubechies)によって作られた。彼女はマラーの方法を使い、関数にモーメント条件としてレギュラリティーを課すことによって、一連の直交ウェーヴレットを作った。図2の関数では1次のモーメントが0であるが、図7に示すドーブシーの関数D_{12}では5次までのモーメントが0である。

5 ウェーヴレット理論

ドーブシーはドーブレット(Daublets)と呼ばれる直交ウェーヴレットを作っただけでなく、多重解像度解析に基づくウェーヴレットの一般的な作り方を示した。これによってさまざまなウェーヴレットを作ることができるが、実際彼女はドーブレットより対称性のよいシムレット(Symlets)や、スケーリング関数もモーメント条件を満たすコワフレット(Coiflets)も作った。さらに1992年にはコーエン(A. Cohen)らとともに双直交ウェーヴレットを作った。これはスプラインをスケーリング関数とし、直交性を持たない欠点を補うように工夫されたもので、多項式の組み合わせで作られる簡単な関数で、しかも対称性を持つ関数としての利点がある。

こうして基本的な概念が確立され、実際に関数が作られて道具建てがそろうと、アルゴリズムに実装することが可能になる。このころからウェーヴレットの応用が盛んになった。論文の世界に閉じこめられていたウェーヴレット理論も書籍としてまとめられるようになった。初期の3部作[1-3]はウェーヴレット理論を一般に開放したし、直交関数系という観点から数学的によくまとまった本も現れた[4]。

その後、理論がさらに整備されるにつれて毎年数冊の本が出版されるほどになったが、現在代表的な教科書としては数冊を挙げることができる[5-8]。日本語の教科書としては9—11)がある。

応用にはコンピュータによる計算が不可欠である。1990年代にはパソコンの性能が飛躍的に向上し、これを利用してウェーヴレット解析ソフトウェアもたくさん作られるようになった。初めはフリーウェアであったが、1995年頃にはその実績を踏まえて商用のソフトウェアにアドオンとして使うパッケージが作られるようになった。代表的なものとしては、統計数値計算システムS-PLUSのWavelet Toolkit、行列数値計算システムMATLABのWavelet Toolbox、数式処理システム*Mathematica*のパッケージWavelet Explorerがあり、それぞれのソフトウェアの特徴が生かされたデザインとなっている。応用研究にはこれらのソフトをそのまま、あるいは機能を加えて利用することができるようになった。文献6)はもともとS+Waveletのマニュアルであるが、教科書としても優れている。

ウェーヴレット理論は応用とともにさらに発展した。ウェーヴレットは対数的周波数解像度を持ち、低いレベルにおける解像度がよくない。これを改善するものとして1992年にコワフマン(R. Coifman)、メイエ、ヴィッカーハウザー(M. Vickerhauser)はウェーヴレット・パケットを考案した。また、同じ頃コワフマンとメイエは、高いレベルにおける時間軸解像度を改善するものとして局所三角関数基底を考案した。これはJPEGなどの画像圧縮法に一般に使われている局所コサイン基底を一般化したもので、これに滑らかな窓関数をかけて作られる。これらの関数や基底はウェーヴレット理論における標準的な項目となっており、上に述べたソフトウェアにも標準で実装されている。

6 連続ウェーヴレット変換の応用

ウェーヴレットの応用はまず連続ウェーヴレット変換によって信号を時間・周波数解析することから始まった。図3のような表示の代わりにふつう等高線グラフが使われる。図8にはフラクタル信号を解析した例を示すが、異なるスケールで相似なパターンが観測される。

このような等高線グラフを使って正常な信号と比較することにより、信号の中に埋もれた異常性を検出することができる。フーリエ変換で信号の特異性が大域的に表現されることを述べたが、ウェーヴレット変換では信号の特異性をウェーブレット係数の性質から探ることができる。このような観点から、日本においても1990年頃から連続ウェーヴレット変換の応用研究が始まった。山田らによる乱流のベキ則の解析や、菊池らによるエンジンの異常燃焼の検出は代表的なものである。

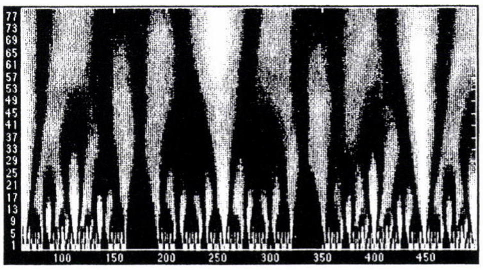

図8　フラクタル信号のウェーブレット解析

しかし、次第に離散信号の解析には離散ウェーヴレット変換が使われることが多くなった。連続ウェーヴレット変換で受動的に信号の性質を観測するのではなく、信号処理としてデータをさまざまに加工して、もっと積極的にデータから情報を得ることができるからである。次の節でその基本を簡単に見ることにしよう。

7 フィルタとウェーヴレット関数

離散ウェーヴレット変換の最も簡単な例は移動平均である。32個の数値からなる信号$\{s_0, s_1, \ldots, s_{31}\}$を考え、次のように2個ずつ組にして平均と差をとろう。

$$\left.\begin{matrix} c_0 \\ d_0 \end{matrix}\right\} = \frac{s_0 \pm s_1}{2}, \ \ldots, \ \left.\begin{matrix} c_{15} \\ d_{15} \end{matrix}\right\} = \frac{s_{30} \pm s_{31}}{2}$$

$\{c_k\} = \{c_0, c_1, \ldots, c_{15}\}$は信号の移動平均、$\{d_k\}$は各組における差分、すなわち変動分を表す。移動平均と変動分の和と差をとって交互に並べれば元の信号を復元することができる。

$$s_0 = c_0 + d_0, \ s_1 = c_1 - d_1, \ \ldots$$

正確にいえば$\{c_k\}$は移動平均を一つおきに取ったもので、長さは16、つまり元の信号の長さ32の半分となっている。変動分$\{d_k\}$の長さも16で、両方合わせれば元の信号と情報量が等しく、そのために元の信号を完全に復元できる。変動分$\{d_k\}$は信号$\{s_k\}$のウェーヴレット成分と呼ばれ、これを抽出する手続きは信号のウェーヴレット分解と呼ばれる。信号を画像と見れば、信号の長さは解像度を表す。移動平均$\{c_k\}$は元の信号の半分の解像度を持ち、平滑化された信号を表す。

ウェーヴレット分解はディジタルフィルタによる信号処理として実行できる。係数を$\{\frac{1}{2} p_k\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$とするディジタルフィルタで信号を処理すれば移動平均が、$\{\frac{1}{2} q_k\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$で処理すればウェーヴレット成分が得られる。これら2つのフィルタは互いに共役な対をなし、

分解で得られた成分からの元の信号の再構成も、同じ共役なフィルタ対からなるフィルタバンクを使って行うことができる。

さらに、移動平均を改めて信号とみなしてウェーヴレット分解を行うこともできる。これを繰り返すと、32個のs_kは16個のd_kと、このとき得られた16個のc_kを分解して得られる8個のd_kと、このとき得られた8個のc_kを分解して得られる4個のd_kと、という具合の和に分解される。

$$\{s_k\}_{32} \to \{d_k\}_{16}+\{d_k\}_8+\{d_k\}_4+\{d_k\}_2+\{d_k\}_1+\{c_k\}_1$$

ここで、{　}の添字は係数列の長さで、それぞれをピクセルと見なせば解像度を表す。レベルjを用いて解像度を2^jとすれば、もとの信号は$j=5$であるから、$j=0$まで5段階の分解が可能である。このような信号$\{s_k\}$の分解を離散ウェーヴレット変換という。また、逆に元の信号を復元する変換が逆変換である。

この例のフィルタはハール・フィルタと呼ばれ、実際にも使われるが必ずしも理想的なフィルタではない。たとえばs_0からs_1への変動は捉えることができるが、s_1からs_2への変動は捉えられない。これらの欠点を補うためには係数の個数の多いフィルタを使えばよく、たとえばドーブシーのフィルタD_4は次の係数からなる。

$$\left.\begin{matrix} p_0 \\ p_3 \end{matrix}\right\} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}, \quad \left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

また$q_k=(-1)^k p_{1-k}$である。さまざまな長さのフィルタが考案されているが、そのようなフィルタはウェーヴレットの理論から決定される。

一般にフィルタを$\{p_k\}$とするとき、信号のウェーヴレット変換は

$$c_k = \frac{1}{2}\sum_{\ell} \overline{p}_{\ell-2k}s_\ell, \quad d_k = \frac{1}{2}\sum_{\ell} \overline{q}_{\ell-2k}s_\ell$$

また逆変換は

$$s_k = \sum_{\ell}(p_{k-2\ell}c_\ell + q_{k-2\ell}d_\ell)$$

で、これらはまとめてMallatアルゴリズムと呼ばれる。

フィルタ係数p_kが与えられるとスケーリング関数が決まる。スケーリング関数とはトゥー・スケール関係

$$\phi(t) = \sum_k p_k\phi(2t-k)$$

を満たす関数である。ウェーヴレットは

$$\psi(t) = \sum_k q_k\phi(2t-k)$$

によって与えられる。ハール・フィルタのときこれらの関数は、図6のハール関数となることは容易にわかる。上に示したドーブシー・フィルタでは、図2のドーブシー関数となることを示すことができる。このように、フィルタp_kと関数は密接に結びついており、フィルタの性質は関数の性質から決められる。

トゥー・スケール関係によって多重解像度解析が数学的に定式化される。実際、フィルタ係数にハール・フィルタを取って2次元に応用すれば、ピラミッド・アルゴリズムで2×2ピクセルの平均値を1ピクセルに割り当てる操作を表す。ドーブシー・フィルタではそれを一般化した操作になっている。

8 離散ウェーヴレット変換の応用

画像圧縮は離散ウェーヴレット変換が最も有効な応用である。画像は2次元データであるから、縦方向と横方向と独立にウェーヴレット変換を行う。エッジなど画像における重要な情報は変動分に相当するから、エッジの位置に相当するウェーヴレット係数の値が大きく、そのほかの部分では係数の絶対値は小さい。小さい値の係数を0と置いてこれをカウントしなければ、情報を失わずに信号の圧縮ができる。図9に示すのは、指紋の画像(左)をウェーヴレット分解し、1/10に圧縮して逆変換した画像(右)であるが、情報はほとんど失われていない。

統計学の分野では、ノイズを除去する有効な方法としてウェーヴレット縮小法(WaveShrink)がドノホ(D. Donoho)らによって開発された。図10にその例を示す。これらは代表的な例であるが、ウェーヴレットの応用範囲は極めて広く、ここではこれ以上の紹介を割愛せざるを得ない。

9 最近の動向

1990年代中期からはウェーヴレットの応用は普及の段階に入ったと言える。前述のように教科書やソフトウェアが整備され、ウェーヴレットはあらゆる分野の研究者やエンジニアに身近なものとなった。コンピュータと不可分のウェーヴレット応用は、インターネットの普及を最大限に

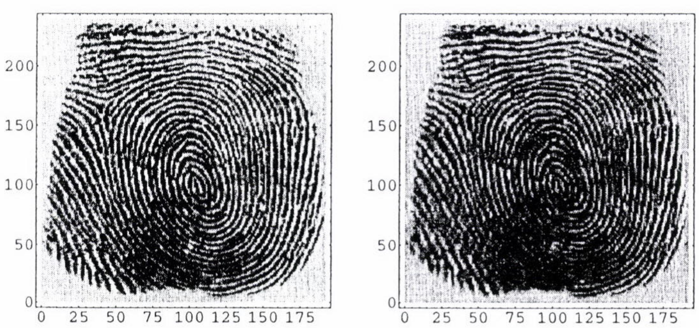

図9　指紋の画像(左)の圧縮(右)

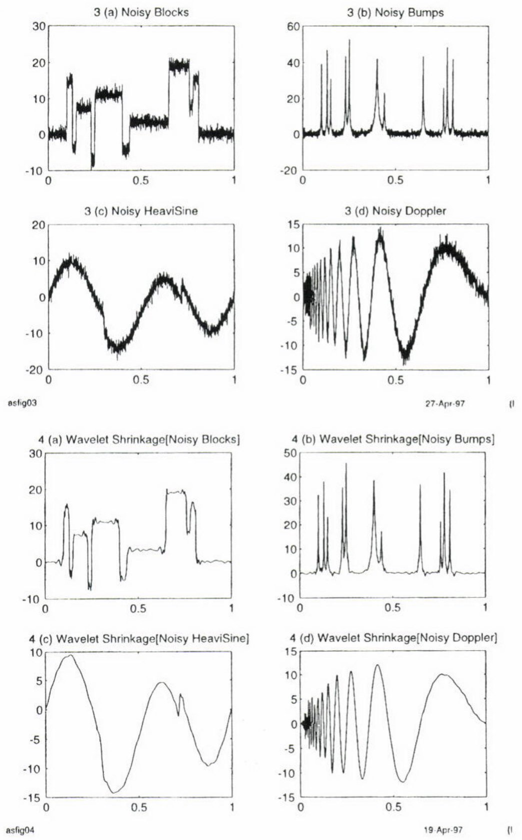

図10　ウェーヴレット縮小法によるノイズ除去の例

利用している。1992年春にスウェルデンス(W. Sweldens)によって開設されたウェーヴレット・ダイジェスト(http://www.wavelet.org/)にはウェーヴレットに関するあらゆる情報が集められており、新しい論文のアブストラクトや学会の予定、さらにウェーヴレットに関する質問や答えが載っており、ハイパーリンクによって論文のファイルや学会の詳細を取り寄せることができる。

ダイジェストを見ながら最近の動向を概観してみると、理論の面では、区間に限定されたウェーヴレット、リフティングというより高速なウェーヴレット変換アルゴリズムの考案、マルチ・ウェーヴレットなどが挙げられよう。一般にウェーヴレットの応用においては、信号の境界条件の扱いが難しいが、区間限定ウェーヴレットはこれを解決する試みである。またマルチ・ウェーヴレットは、ふつう多重解像度解析は1つのスケーリング関数によって生成されるが、対称性などを改善するために複数のスケーリング関数を導入するもので、フィルタ係数が行列となる。しかし、これらはまだ研究段階で、標準とされる関数は作られていない。

微分方程式の解法などの数値計算への応用は以前から行われているが、ウェーヴレット基底では微分演算子が対角化されないので簡単でなく、最近も研究が盛んである。これも含めて、日本におけるウェーヴレットの応用研究の一部は文献12)にまとめられている。

最近は広い範囲で応用研究が盛んで、生物学、化学、医学などの分野でデータ解析や画像解析に使われている。また、特に最近注目されるのは、経済などの時系列解析における分散の解析への応用である。

こうしてみるとウェーヴレットは、さまざまな研究者やエンジニアが、いまや一般に普及したインターネットで一同に会し、分野を越えて研究を行い、情報を交換する世界を形成していると言えよう。

参考文献

1) C. K. Chui：An Introduction to Wavelets, Academic Press,（1992）；桜井　明, 新井　勉訳, ウェーブレット入門, 東京電機大学出版局,（1993）
2) I. Daubechies：Ten Lectures on Wavelets, SIAM,（1992）
3) Y. Meyer, Wavelets：Algorithms and Applications, SIAM,（1993）
4) G. G. Walter：Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications, CRC Press,（1994）
5) G. Strang and T. Nguyen：Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press,（1996）
6) A. Bruce and H.-Y. Gao：Applied Wavelet Analysis with S-PLUS, Springer,（1996）
7) C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo：Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms：A Primer, Prentice-Hall,（1998）
8) S. Mallat：A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press,（1998）
9) 榊原　進：ウェーヴレット　ビギナーズガイド, 東京電機大学出版局,（1995）
10) 芦野隆一, 山本鎮男：ウェーブレット解析, 共立出版,（1997）
11) C. K. Chui：Wavelets, A Mathematica Tool for Signal Analysis, SIAM,（1997）；桜井　明, 新井　勉訳, ウェーブレット応用, 東京電機大学出版局,（1997）
12) M. Kobayashi, editor：Applications of Wavelets, SIAM,（1998）

（1998年8月14日受付）