



鉄の歴史

戦後復興・発展期における我が国鉄鋼製造技術史—学術編 20世紀後半の塑性加工理論の変遷

木内 学 東京大学 生産技術研究所 教授
Manabu Kiuchi

Development of Theory of Plasticity in Second Half of 20th Century

1 はじめに

20世紀後半の塑性加工分野における基本理論の構築とその応用技術の進歩には目覚ましいものがある。塑性ポテンシャル、構成方程式、変分原理、停留原理などが次々と定式化され体系化され、それらに基く被加工材の変形解析技術が開発されて実加工へと応用されてきた。その結果、圧延、押出し、引抜き、鍛造、深絞り、張り出し、曲げ、矯正、などについて、主としてエネルギー法、上界法、有限要素法を用いた数値シミュレーションが広く行われるようになり、それまで技術的検討が殆ど不可能であった多くの問題が理論を通して解明されることとなった。このような研究を通して、(1)被加工材の部分的・全体的変形挙動の解明、(2)製品の形状・寸法精度の予測、(3)工具や加工機に加わる負荷の把握、(4)製品の機械的強度や残留応力分布の推定、などが試みられ大きな成果をあげてきた。さらに、それらの成果を利用した、(1)ロール・金型・その他治工具の最適設計、(2)パススケジュールや加工工程あるいは加工機の高効率化、(3)新しい加工方法・加工機・加工システムの開発、(4)新製品の開発および製品の高品質化、などが続けられている。

本稿では、20世紀後半の塑性力学および塑性加工理論の発展の経過を省みるとともに、解析技術の現状と、これまでに得られている各種の成果、あるいは今後の課題について述べる。

2 塑性理論の基盤の構築

20世紀初頭から始まった金属塑性理論の発展は、1950年に出版されたR. Hillの名著“Mathematical Theory of Plasticity”¹⁾によって集大成され、いわゆる塑性力学の骨格が完成された。そこに至る過程で、Karman、Nadai、Sacks

らによって先駆的な研究が続けられ、それらの成果は彼等の著書例えば“Theory of Flaw and Fracture of Solids” (Nadai 1931)²⁾、“Spanlose Formung der Metalle” (Sacks 1938)などにまとめられ、金属塑性理論の研究を先導する重要なテキストとなった。加えて第二次大戦後、Prager、Hodge³⁾らによって塑性理論の更なる発展が図られ、弾塑性体の停留原理や解の唯一性定理などが構築された。これらの原理や定理は後のリミットデザインや塑性設計などいわゆる極限解析の基礎となった。

Hillはその著“Mathematical Theory of Plasticity”において、20世紀前半の塑性力学の発展を一貫した理論体系の下に詳細に記述し、その後現在に至るまでの塑性力学および塑性加工学の進歩に大きな影響を与えた。彼の活躍を契機として、塑性力学に関する研究の中心はそれ以前のドイツからアメリカおよびイギリスに移ったが、第二次大戦後の研究環境の大きな混乱と変化にもかかわらず、Sokolovski⁴⁾、Bridgman⁵⁾、Taylor⁶⁾らによる大塑性変形と延性破壊あるいは金属材料の変形抵抗と硬さ、などに関する研究が精力的に行われた。続いて弾塑性体のみならず剛塑性体に関する停留原理の証明やすべり線場理論の完全解などに関する研究が相次ぎ、塑性理論の研究は全盛期を迎えた。併せて、結晶構造および結晶内のすべりから塑性理論を構築しようとする試みも始まり、Cottrellによる有名な“Dislocation and Plasticity Flow in Crystals” (1953)⁷⁾が出版されるに及んで、塑性理論は新しい側面を有するに至った。Cottrellの仕事と相前後してBishop⁸⁾らによる結晶塑性理論の研究も進み、多結晶体の降伏条件を導く試みや変形集合組織を求める試みなども進められた。

ところで、第二次大戦以前の我が国における塑性理論の研究は少なく、僅かに中原らによるテキストを見る程度であったが、戦中から戦後にかけて福井を中心とする薄板の成形に関する基礎的研究が始まり、1951年には現(社)日本

塑性加工学会の前身である塑性加工研究会が発足して、我が国の塑性理論およびその応用としての塑性加工理論の研究が本格化した。その後、工藤⁹⁾による上界法の拡張と塑性変形解析への応用などが行われ、我が国の塑性加工理論の研究も先進諸国の水準に肩を並べるに至った。1960年代後半より、各大学・企業における研究が急速にその勢いを増したが、時あたかも我が国経済は高度成長時代に突入し、各所に大規模製鉄所が建設され、同時に自動車産業の急成長が始まる状況となり、塑性加工研究に対する需要も急激に大きくなっていった。

3 塑性理論の応用への流れ

実加工の分野で塑性理論が有効に利用されたのは、板圧延に対するKarmanの方程式の提案(1925)が最初とされている。この圧延方程式は、単に最初の事例であっただけでなく、現在に至るまで、塑性理論が実加工の分野で最も大きな成功を収め、最も顕著な工業的成果をもたらした事例と云うことができる。実際、現在の最先端の圧延システムの基幹をなす変形モデルあるいは制御モデルは、このKarmanの方程式より展開した圧延理論の上に成り立っている。

板成形への塑性理論の応用も比較的早く始まり、第二次大戦後間もなくHillによって異方性材料の降伏条件が提案され(1950)¹⁾、これを用いた円筒の深絞り成形に伴う耳の発生機構の検討、あるいは縮みフランジ変形の平面応力解の提案などが行われた¹⁰⁾。また、円筒容器の深絞り成形時のダイス肩における板厚減少に関する研究も行われたが、その中にはHillによるひずみ増分論を用いた変形解析¹⁾、同じく福井らによる全ひずみ理論を利用した解析もある¹¹⁾。その後、深絞り成形時のフランジ部に発生するしわの発生限界の予測手法の研究も進められ、平板の圧縮座屈を基礎とする解析に引続いて、エネルギー法による解析¹²⁾、あるいはまたモーメントの釣合に基く解析などが行われた。その結果、実成形において有効なしわ押え力を効率的に予測することが可能となった。

薄板の成形限界の研究と関連して、いわゆる塑性不安定に関する研究も進み、1950年には“外力の変化による相当応力の増加が被加工材の加工硬化特性に起因する相当応力の増加より大きい場合に変形が不安定化する”という仮説がSwiftによって提案された¹³⁾。同時期にHillは平面応力場における応力と速度との不連続条件より、局部くびれと拡散くびれという2種類のくびれ即ち不安定変形が発生すると考える判定条件式を提案した¹⁴⁾。以後、薄板成形の塑性不安定性に関する研究は、このSwiftとHillの考え方を中心に

進められ今日に至っている。

板材の曲げ成形も古くから塑性理論の適用が試みられた塑性加工分野の一つである。室田、戸澤、川田、その他多くの研究者らにより平面応力曲げや平面ひずみ曲げの解析が試みられ、曲げ成形に伴う弾性回復や板厚の減少を予測する方法などが種々の見地から検討された。

絞りや曲げ以外の板材の成形に関連する理論面からの研究も古くから行われてきた。例えば、1960年代後半より体系的に行われたスピニングについての葉山の優れた研究があり¹⁵⁾、ロールフォーミング加工については木内らによる一連の理論的な研究がある¹⁶⁾。成形とは異なるが曲げ変形と密接に結びついている問題として、板材や棒・線・管材の矯正加工がある。矯正のメカニズムを理論的に明らかにする研究も1960年代から70年代にかけて日比野、曾田、荒木らによって幅広く行われた。

4 塑性理論の検証と支援

塑性理論の構築と平行して、それらを検証するための2軸あるいは3軸の材料試験法の開発が行われ、多軸付加応力下での供試材の変形挙動の測定も試みられ、これらの研究を通して、移動硬化モデルがPrager(1955)¹⁸⁾によって提案され、吉村(1957)¹⁷⁾は、異方性材料に関する2次形式の降伏条件の拡張を提案した。

1950年代の後半に入ると、モデル材料を用いた実験解析手法の開発も進み、いわゆるVisio-Plasticity法も広く試みられるようになった。モデル実験材料としては、鉛やワックスに加えてプラスティシンが発明され急速に普及した。この種のモデル実験手法の発達に伴って、熱間鍛造、冷間鍛造、熱間孔形圧延、押出し加工等の研究が大きく進展した。

併せて、ひずみの測定手法としてひずみゲージの使用も広く行われるようになり、弾性ひずみ範囲のみならず若干の塑性ひずみ範囲までも直接測定することができるようになって、塑性理論の精度の高い検証が可能となった。モデル実験法の高度化およびひずみゲージの広範な使用は、塑性理論の発達と整備を側面から強力に支援した。

塑性理論を発展させ金属材料の変形挙動の解析へ展開していくためには、当該被加工材の正確な応力-ひずみ曲線を、必要十分なひずみ範囲において得ることが必要不可欠である。このため大ひずみ範囲における応力-ひずみ曲線の求め方、あるいは繰り返し伸び・縮み変形の際の応力-ひずみ曲線の測定方法が種々検討されてきた。たとえば1970年代、戸澤らは薄板の繰り返し伸び・縮み変形の応力-ひずみ曲線を得るために、薄板を貼り合わせてブロック状の

供試材を作る方法などを提案し、多くの測定結果を提供した。一方、吉田は鉄鋼メーカーや自動車メーカーを組織化して指導しつつ、薄板成形時の変形を、伸びフランジ変形、縮みフランジ変形、等二軸変形、曲げ変形、などの基本様式に分類して成形の難易度を検討する方法、成形限界や塑性不安定限界を統一的に表示し検討するための変形状態図の作成方法と利用方法、素板の変形能を評価するための特性パラメータなどを提案し、1960年代から1980年代にかけて薄板のプレス成形技術の発展に大きく貢献した。

5 実加工解析への展開

現実の塑性加工解析に際して、塑性力学的諸条件、すなわち降伏条件・釣合条件・流動法則・境界条件、などをすべて満足する応力・ひずみあるいは変位・速度の解を求めることは一般に非常に困難である。そのため、その近似値を得るための多くの努力がなされてきた。

近似解析法としては、(1)スラブ法、(2)エネルギー法、(3)すべり線場法、(4)上界法または上界接近法、(5)有限要素法、(6)境界要素法、などがある。それぞれ、適用範囲の広狭、解析計算に要する時間、得られる結果の質および量、などについて長所・短所を有しており、現在、広く用いられているのは、スラブ法、上界法、剛塑性有限要素法(以下剛塑性FEM)である。

被加工材を適当に分割して要素を設定し、各要素内での変形と応力の一様性を仮定するスラブ法(仮定した要素をスラブ要素と呼ぶ)の応用にはおのずと限界があるが、たとえば、板圧延へのスラブ法の導入は極めて大きな成功を修め、現在の先進的な板材圧延技術も、その基礎はスラブ法の活用によって確立されたと言っても過言ではない¹⁹⁾。さらに今なおその高度利用技術の開発が進められており、スラブ法の有用性は未だ失われていない。

上界法または上界接近法、あるいは一般性を有するエネルギー法は、塑性力学における「第2変分原理」すなわち「上界定理」を用いて、剛塑性体近似した被加工材の変形・加工に要する荷重・変位増分または速度分布などを求める手法である。既述のように、「第2変分原理」については、Hillによる基本的の定式化が示された後²⁰⁾、工藤らにより逐次理論的な拡張が図られ²¹⁾、あわせて、押出し、引抜き、鍛造加工の解析に広く用いられるなど、各種の塑性加工の数値シミュレーション技術として大きな役割を果たしてきた。さらに、コンピュータ利用環境の発達とともに、上界法の応用技術も急速に高度化し、特に、(1)解析の実行が容易であり、短時間で結果が得られる、(2)解析の過程および結果が直観的に理解しやすい、(3)解析手法としての柔軟性と汎

用性がある、などの面から、依然として高いポテンシャルを有する解析技術と考えることができる。

有限要素法の塑性加工への適用は、後述するように、1970年代前半の剛塑性FEMの提案により本格的に始まった²²⁾。以来、その応用は、(1)平面ひずみすえ込み、軸対称すえ込み、などの単純なすえ込み加工の解析から、(2)各種平面ひずみ鍛造、同圧延、同押出し、あるいは各種段付軸等の軸対称鍛造および押出しの解析、(3)次いで多段鍛造や多パス圧延の近似(擬)3次元解析、(4)続いて完全3次元圧延解析、同鍛造解析、同じく押出し解析、(5)さらにまた複雑形状品の3次元成形の弾塑性解析などへ向かって拡張されてきた。

以下、代表的な解析手法について、その発展の経過と課題をとりまとめて示す。

6 エネルギー法・上界法の進化 —初等解法の成果—

エネルギー法は、被加工材に対して加えられる外力の仕事率と被加工材の変形仕事率を等置して、荷重と変形モードなどを計算する方法の総称である。しかしながら当初提案された単純(理想)変形エネルギー法では解の精度の評価ができないので、この欠点を補うために変分原理に基づく極限解析法(リミットアナリシス)が提案された。すなわち、第1変分原理(下界定理)によれば、“移動工具に作用する外力のなす仕事率の正解は、移動工具面において可容応力と釣り合う力のなす仕事率より小さくなく”、第2変分原理(上界原理)によれば、“物体内に任意の可容速度を考えたとき、これによる仕事率は、移動工具に作用する外力のなす仕事率の正解より小さくない”、とされ、これら両定理を利用して正解仕事率の上・下界を得るようになった。

一般に、仕事率の上界を求めることは安全側の仕事率や荷重を得ることを意味し技術的価値が高いこと、更に可容速度を求める方が可容応力を求めるより容易なことから、塑性加工の解析法としては上界解析の方が有用である。この上界解析を推進し、その有用性と可能性を広く世に示したのは、工藤とJohnsonである。彼等の成果はこの分野の研究者に大きなインパクトを与えたが、その後、平面ひずみや軸対称条件下の種々の鍛造あるいは押出しプロセスが次々と同様の方法で解析され、従来解明できなかった多くの問題に理論の光が当てられることになった。

7 UBETの活用 —実加工解析の拡大—

1970年代以降、上界法の利用技術は大きな転換を遂げた。すなわち計算機の利用環境の進展と共に、仕事率関数の積分や最適解の導出には、さまざまな数値計算法を導入することが可能となり、代わりに速度場の構成に際しては、被加工材の変形挙動の特徴をできるだけ適確に表現しようとする考え方が主流となった。これによって上界法による解析精度およびその適用範囲は大幅に改善される結果となったが、更に工藤は、被加工材を幾つかの変形領域に分割し、それぞれの中で仕事率を計算しつつ総体として仕事率の最小化を図る方法を考案した。この方法により計算された材料の流れは実験観察結果とよく一致し、荷重の上界だけではなく、変形流動挙動の解析法としても上界法が有用であることが示された。この方法は更に発展し、各領域ごとに未定係数を含む速度分布を仮定し、未定係数の連立方程式を解いて、複雑な変形状況をシミュレートするUBET (Upper Bound Elemental Technique) に発展し、木内らは非軸対称問題にも広く適用して多くの成果を得た。

8 有限要素法の進展 —高度加工解析への道—

我が国における塑性変形解析への有限要素法の応用は、山田による弾塑性変形に対する剛性マトリックス (1967) の提案とそれを使用した解析プログラムの開発、更に変形増分の1ステップごとに一つづつの要素を降伏させるいわゆるr-min法の提案に始まるが、この成果はその後の研究に多くの示唆を与えた。

山田の研究に刺激されて²³⁾有限要素法の応用研究が各所で始まったが、中でも最も早くこの問題に取り組んだ長松らの円柱圧縮のバルジ変形解析 (1969年、第30回塑加連講論) は、我が国の塑性加工研究者に大きな衝撃を与えた。続いて大ひずみ大変形問題に関して、北川らによる埋込み座標を用いた解析例 (1972) などが報告され、FEMの応用は一挙に拡大していった。

1973年 (社) 日本塑性加工学会から会誌「塑性と加工・塑性加工への有限要素法の応用特集号」が発行され²⁴⁾、その後の研究の方向と枠組が示された。その中でKobayashiらは剛塑性FEMの基本的考え方を紹介し、ラグランジュ乗数 λ を導入して非圧縮性条件の下で仕事率の最小化をはかる方法を示した²²⁾。この λ は静水圧力に相当し、これより各応力成分をも計算することが可能となったが、この剛塑性FEMの提案により、塑性加工へのFEMの応用は全く新しい展開

を見せることになり、その範囲は著しく拡大した。

その後、剛塑性FEMについては、非圧縮性条件を満たすためのペナルティ法がZienkiewiczら (1975) によって導入された。一方、島らは多孔質金属の構成方程式をFEM形式で表し、焼結鍛造品の密度分布を計算する方法を示したが (1975)、この考え方は材料の圧縮性を僅かに許容する近似的な剛塑性体モデルを用いた解析法へと発展した。これらの方法はその後広く用いられ、剛塑性FEMの全盛を迎えることとなった。

ところで玉野は早くに定常圧延変形の弾塑性FEM解析を試み (1973)、定常状態の流線を仮定し、これを逐次修正して行くいわゆる“流線法”を提案して、スキンプス圧延のシミュレーションを行った。玉野の研究は、圧延加工へのFEM適用の先駆けとなり、剛塑性FEM解析にも受け継がれた。この成果は、やがて噛み込み初期の非定常変形から定常変形へ移行する過程を段階的に追跡していく増分法による大圧下圧延解析への口火となった。その後、圧延加工のFEM解析は剛塑性解析が主流となるが、玉野が提案した考え方は現在でも広く用いられている。

以上、解析手法を中心に紹介したが、以下、鉄鋼生産に関係の深い圧延、押出し、引抜き、鍛造に例をとり、それぞれの実践的理論研究の経過と展望についてみてみよう。

9 圧延加工の3次元解析の動向

1980年代に入って、3次元剛塑性FEMによる圧延の数値解析が本格的に試みられるようになった²⁵⁻²⁷⁾。特に板材圧延については、(1) エッジドロップを含む圧延後の板形状 (クラウン) の詳細な予測、(2) 板形状の制御を目指して考案された各種の圧延機および圧延ロールの機能の解明、(3) 圧延工程、圧延条件の最適設計に要する技術データの整備、等を目指して多くの研究が行われた。

更に1990年代に入ると、ロールの弾性変形解析と被圧延材の塑性変形解析とを結合した連成解析システムを構築し、これを用いて、多段圧延機による薄板圧延について、圧延後の板クラウンに与える圧延条件の影響を詳細に調べる研究なども積極的に行われるようになった。それらの結果として、(1) ワークロールシフトによる板クラウン制御、(2) 小径ワークロールによるエッジドロップ低減、(3) ワークロールの水平面内ベンディングによるエッジドロップの解消、(4) クロスロール圧延による板クラウン制御、などについて多くの知見が得られ、新形式圧延機や新圧延方式の開発が大きく進展した²⁸⁻³¹⁾。

棒・線・形材圧延についても、剛塑性FEMを用いた被圧延材の塑性流動や圧延圧力分布の詳細な検討、あるいは製

品の形状・寸法の予測などが広く行われた。このような動きは1980年代末より本格的に始まり、棒・線材の各種圧延パス、アングル材などの形鋼圧延、H形鋼のユニバーサル圧延、あるいは3ロールによる棒・線材の圧延などの解析へと拡大してきた³²⁻³⁵⁾。現在、3次元剛塑性FEMは、ロールの孔形設計や工程設計の分野にも組み込まれつつあり、AIやニューラルネットワーク技術との組み合わせも試行され、現行の圧延工程の評価手段や診断方法としても活用され始めている。

管材圧延の3次元変形解析は、(1)被圧延材並びにロール・プラグ・マンドレルなどの幾何学的関係が複雑であり、解析に要する要素数が必然的に増すこと、(2)ロール・プラグ・マンドレルと被圧延材との接触判定が複雑であること、(3)被加工材の各点が描く空間的軌跡すなわち流線が3次元的に複雑となり、定常流れの条件を満足させるための流線の修正に手間どること、などにより、他の圧延分野に比較して若干遅れて進行している。

押出し・引抜き加工の3次元解析の動向

上界法の発展過程において、その応用が最も積極的に行われてきたのは、押出し・引抜き加工の分野である。解析の目的も、当初の加工力の評価や最適ダイス寸法の予測から、破断、引き細り、シェーピングなどを含むいわゆる加工限界の予測、セントラルバースト、表面割れ、その他の製品欠陥の発生メカニズムと発生限界、などの解明にまで至っている³⁶⁾。

一方、1980年代に入り、この分野においても解析の対象が軸対称問題から非軸対称即ち3次元問題へと拡張され、従来、解析が困難と見られていた各種形材・異形材・異形管材などの押出し・引抜き過程の解析が可能となってきた。特に、木内らによって3次元速度場を構成する一般的手法が見出され、この分野の上界法応用の範囲および可能性が一気に拡張される結果となった³⁷⁾。その過程でT形材、H形材、溝形材、アングル材等々の押出し・引抜きについて、系統的な数値実験が行われ、多くの有用且つ詳細な技術データが提示されている。他方、管材の偏肉の変化挙動に関するシミュレーションも行われ³⁸⁾、その結果として、非軸対称ダイスなど、各種の非対称条件を外部から付加する事により、ダイス内での被加工材の流れを制御し、偏肉を効率よく矯正できることが明らかにされた。

1990年代に入ると剛塑性FEMによる各種の押出し加工の解析が盛んに行われるようになり、特にダイス内での被加工の流れに関する詳細な検討を通して、ダイス設計のあ

り方や手法についての検討が進み、実生産上極めて有用な技術的知見が得られるようになった。

鍛造加工の3次元解析の動向

鍛造加工における金型設計理論の構築は、被加工材の3次元塑性流動を適確に予測することなしには不可能である。故に、被加工材の3次元変形解析はこの分野の最も重要な課題である。すでに、すえ込み、前後方押出しをはじめ、各種の型鍛造について、上解法や剛塑性FEMなどによる変形解析・応力解析が行われている。特に1980年代後半より急速な発展を見た3次元剛塑性FEMの適用によって、被加工材中の応力・ひずみに関する詳細な解析が可能となっている。

ところで、鍛造加工へのUBETのより高度な応用として、興味深い試みが進められている。その一つは、複数の工程を要する鍛造加工の各工程に要する金型形状の合理的な決定を行うために、製品からピレットへ至る逆過程での被加工材の変形挙動のシミュレーションを行い、前段階終了時の被加工材の望ましい形状を決定しようとする考え方である³⁹⁾。この考え方によれば、この金型形状の決定過程が大幅に短縮され、効率的な設計が可能となる。この他、大型鍛造品の工程設計にUBETを利用する試みや工具面圧を推定する試みも進んでおり、この面からの新たな発展が期待できる。

結 言

本稿では、20世紀後半の塑性理論の発展について概観し、被加工材の変形挙動の解明や工具並びに加工プロセスの設計あるいは最適化のための手段として大きな役割を果たしてきた塑性加工解析技術、特に剛塑性FEM、上界法、UBET、等の研究経過と最近の動向について紹介した。紙面の都合上、説明の範囲を圧延、押出し、引抜き、鍛造の分野に限定し、その他の説明は省略した。調査の範囲も限定されており、内容的な偏りや見落としもあると思われるが、塑性加工技術の基盤をなす塑性理論と変形解析技術の動向を知るための一助となれば幸いである。

参考文献

- 1) R. Hill : The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Press (1950)
- 2) A. L. Nadai : Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw-Hill (1931)
- 3) W. Prager and P. G. Hodge : Theory of Perfectly

- Plastic Solids, Wiley (1951)
- 4) W. W. Sokolovsky : The Theory of Plasticity, J. Applied Mechanics, 13-1 (1946), 1.
 - 5) P. W. Bridgman : Studies in Large Plastic Flow and Fracture, McGraw-Hill (1952)
 - 6) S. G. Taylor : Explosives with Lined Cavities, J. Applied Phys., 19-6 (1948), 563.
 - 7) A. H. Cottrell : Dislocations and Plastic Flow in Crystals, Oxford Univ. Press (1953)
 - 8) J. F. W. Bishop : 例えば, J. Mech. Phys. Solids, 3-2 (1955), 130, 同 3-4 (1955), 259.
 - 9) W. Johnson and H. Kudo : The Mechanics of Metal Extrusion, Manchester Univ. Press (1962)
 - 10) H. W. Swift : Engineering, 166-4315 (1948), 357.
 - 11) 福井伸二 : 日本機械学会誌 58-434 (1955), 200.
 - 12) 宮川松男 : 深絞り理論, 一しわの発生限界一, 日本機械学会誌 67-542 (1964), 466.
 - 13) H. W. Swift : Brit. Iron and Steel Res. Ass. ReMW/E/52 (1950)
 - 14) R. Hill : J. Mech. Phys. Solid, 1-1 (1952), 19, 山田嘉昭 : 深絞りの理論, 日本機械学会誌 67-542 (1964), 453.
 - 15) 葉山益次郎 : 回転塑性加工学, 近代編集社 (1981)
 - 16) 日本塑性加工学会編, ロール成形 (1990)
 - 17) 吉村慶丸 : 応用力学講座 : 塑性力学, 共立出版 (1957)
 - 18) W. Prager : Probleme der Plastizitäts Theorie, Birkhäuser (1955)
 - 19) 戸澤康寿, 中村雅勇, 石川孝司 : 塑性と加工. 17-180 (1976), 37.
 - 20) Hill, R. 鷲津・山田・工藤共訳 : 塑性学, 培風館, (1954), 59.
 - 21) 工藤 : 塑性学, 森北出版, (1969), 208.
 - 22) Lee, C. H. and Kobayashi, S. : Trans. ASME, J. Engr. Ind., 95 (1973), 835.
 - 23) 山田嘉昭 : 塑性力学, 日本機械学会, (1968).
 - 24) 塑性と加工・塑性加工への有限要素法の応用特集号, 日本塑性加工学会, (1973) 14-153.
 - 25) 森謙一郎, 小坂田宏造 : 日本機械学会論文集 A, 56-525 (1990), 1288.
 - 26) 豊島史郎, 森賀幹夫, 中山公規, 蝦名 清, 藤井晃二, 竹内正道 : 塑性と加工, 31-350 (1990), 398.
 - 27) 柳本 潤, 木内 学, 中村 充, 倉橋隆郎 : 塑性と加工, 32-367 (1991), 125.
 - 28) 山田健二, 小川 茂, 阿高松男, 菊間敏夫 : 第41塑加連講論, (1990), 63.
 - 29) 豊島史郎, 池田昌則 : 第4塑加連講論, (1990), 71.
 - 30) 高橋 勲, 森謙一郎, 長倉 弘 : 平3塑加春講論, (1991), 165.
 - 31) 柳本 潤, 佐々木保, 木内 学, 河野輝雄 : 塑性と加工, 33-383 (1992), 138.
 - 32) 森謙一郎, R. Kopp : 第38塑加連講論, (1987), 1.
 - 33) 二階堂英幸, 林 宏之, 侍留 誠, 瀬戸恒雄, 直井孝之 : 第38塑加連講論, (1987), 17.
 - 34) 井田真樹, 山田健二, 林 慎也, 濱渦修一, 藤本 武 : 平2塑加春講論, (1990), 61.
 - 35) 柳本 潤, 木内 学, 井上幸雄 : 塑性と加工, 34-384 (1993), 155, 161.
 - 36) Avitzur, B. : Adv. Technol. Plasticity・II, J. S. T. P., (1984), 948. など.
 - 37) 木内・石川 : 塑性と加工, 24-270 (1983), 7.
 - 38) 木内・石川 : 塑性と加工, 25-282 (1984), 604.
 - 39) Osman, F. H., Bramly, A. N. and Ghobrial, M. I. : Adv. Technol. Plasticity・I, J. S. T. P., (1984), 563.

(1998年9月10日受付)