

入門講座

圧延理論入門-3

板プロフィール解析のための3次元圧延理論-1 2次元理論の拡張による圧延解析モデル

3-Dimensional Rolling Theory for Analysis of Strip Profile-1: Generalized 2-Dimensional Model

松本紘美

北九州市立大学 国際環境工学部 教授

Hiroimi Matsumoto

1 はじめに

板圧延の「3次元(的)解析」は、「形状」と「クラウン」の理論予測、あるいはその機構の解明ということが発端である。これには、古典的な2次元(=平面ひずみ)圧延理論を応用する方法と、差分法あるいはFEMによる方法とがある。近年はFEMによる3次元計算が主流のようであるが、計算時間、あるいは複雑な系への応用という観点から、万能とは思わない。また、力学機構を解明するという点では、どうしても「コンピュータを使った実験」の域を出ない。

これに対して、2次元理論の拡張による「一般化2次元圧延理論^{1,2)}」は、厚さ方向の不均一性が重要な役割を果たしている現象に対しては無力ながら、幅方向のメタルフロー、圧延荷重分布や張力分布、あるいは残留応力(=従来の「形状」とほぼ同義)の発生機構などを、2次元圧延理論の言葉で説明できる。もちろん、計算時間の観点からは、FEMでは非現実的な究明が可能であり、たとえば、タンデム圧延の動的シミュレーション³⁾などにも応用できる。本稿では、この系統の疑似3次元解析理論の体系を説明する。

2 歴史的背景

コンピュータが普及し始めた1960年代後半になって、ロール変形だけでなく被圧延材の変形条件との連成問題を取り扱う気運が高まり、1968年にShohet & Townsendによる有名な論文⁴⁾が発表された。彼らは、4-high millにおけるロール軸心たわみの数値計算モデルを提出しただけでなく、いわゆる「張力のフィードバックモデル」の思想を示唆している。しかしながら、このモデルは幅方向のメタルフローを無視しており、熱間圧延でクラウン比率が変化する現象や、冷間圧延でも、板端近くの厚さ変化を説明することは、原理的に不可能である。

このためには、型材圧延の場合と同様に3次元的なアプローチが必要である。最初の本格的な試みは鈴木ら⁵⁾(1971)が発表しているが、ある程度信頼できる数値計算結果を提出したのは戸澤ら⁶⁾(1976)による。この方法については、本講座シリーズで石川先生の解説がある。

筆者と共同研究者らは、Shohetらが示した古典的アプローチの延長線上、すなわち、Orowanの圧延理論を一般化させた形で、板圧延における3次元的な変形挙動の解明を進めてきた。当初(1972)は、Shohetらのモデル(ただし、ロール偏平は3次元的に取り扱う)を冷間圧延に適用しただけの素朴なものであったが、「冷間圧延では、エッジドロップ部以外の厚さ分布がほとんど変化しない」という計算結果を得、その機構を「張力のフィードバック」という言葉で説明した。しかし、現在の解釈からするとこれは見掛けだけであり、本質はまったく異なる。また、入口で張力分布が生じるかどうか不明であり、さらに幅方向のメタルフローを無視していたため、板端近くの応力状態は実際とかけ離れた内容であった。その後、板圧延理論に基づく考察から、これらの問題に対するある程度の解決策⁷⁾(1982)を発表した。

これらのモデルでは、「変形域出口の張力分布が、下流域の張力分布によって(それと同じになるように)決まる」という、Shohetら以来の伝統的な、しかし重大な「仮定」によっていた。しかし、現時点で反省すると、実はこの仮定は「どうでもよい」ものであり、両者の関係をどのように設定しても、変形域の応力状態はほとんど影響されない。したがって、「塑性変形域外の被圧延材は剛体で近似できる」とする「剛塑性モデル¹⁾」で十分であり、「誤解を招く余計な仮定をしていない」という意味で、より本質を表している。残念ながら、このような筆者らの考えは、「張力のフィードバック」という言葉と、「入口張力の分布は出口張力の分布にほぼ等しい」という、「誤った」モデル以外は、世間に受け入れられていないようであり、その主要部である「幅方向のメ

タルフローモデル」を取り入れた例を知らない。

これは、メタルフローモデルをコンピュータプログラムに具現化するのが面倒であったためでもあろうが、そのような手間のわりには、精度がいま一つ物足りなかったためではないかと想像している。しかしながら、それは一般化2次元圧延理論の本質的な欠陥ではなく、採用している圧延荷重式が簡易的な近似式であったなど、計算時間のことを度外視すれば、本来容易に解消できる性格のものである。現代のコンピュータの能力なら、従来採用されていた本質的でない近似を廃しても、計算時間はほとんど問題にならず、必要なら、数学的に必然的な近似³⁾によって、より短時間（「瞬時」と言ってもよい）で解を得ることができる。

3 一般化2次元圧延理論の方程式系と解法

「一般化2次元圧延理論」は、板圧延各パスの擬似3次元解析モデルである。この理論では、被圧延材を幅方向に分割した多くのバンドの集まりとみなす。基本的仮定は、「出入口張力などの境界条件をバンドごとに正しく与えれば、通常の板圧延における程度の幅方向メタルフローがあっても、応力状態はOrowanの理論に一致する」と考えるものである。

3.1 ロール変形条件式

「ロール変形条件式」は、被圧延材から加わる荷重分布 p_i が与えられたとき、出口厚さ分布 h_i と関係づける条件である。圧延機の弾性変形を影響係数 K_{ij} を使った線形式で表せば、出口厚さ分布 h_i は、単位幅あたりの圧延荷重分布 p_i と次式の関係にある。

$$h_i = \sum_j K_{ij} p_j + f_i + S_c + \frac{S_{df}}{2a} (x_i + \xi) \quad (\text{各 } i \text{ ごとに成立}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

添字 i, j はバンド番号を表す。 f_i はロールクラウンやロールベンディング力による変形解、 S_c はロール開度設定の左右平均値、 S_{df} はロール開度設定の左右差、 $2a$ は左右の圧下支点間隔、 x_i は各バンドの（板幅中央を原点とする）幅方向座標、 ξ は幅中央位置の圧延機中心からのずれ量である。ロール間接触や圧下系の非線形的な挙動を考慮する場合は、ロール変形条件式は非線形になり、反復計算が必要である。

ロール変形のモデルは、Shohetらが基本モデルを提出したWR（ワークロール）軸心の変形と、「ロール偏平」と呼ばれるWRの被圧延材側表面の3次元的な変形⁷⁾との重ね合わせである。個々のモデルの細部に関しては議論の余地がまだ残っており、また、圧延機の変形を式（1）の形で表すため

の具体的方法は周知でないようであるが、本稿ではこれ以上立ち入らない。必要なら、参考文献8)を参照してほしい。

3.2 Orowanの圧延理論解を利用する条件式

一般化2次元圧延理論の基本仮定より、幅方向の場所ごとの境界条件を使って、平面ひずみ条件での2次元圧延理論を適用する。2次元圧延理論として、現代ではOrowanの理論の数値解を使うことができる。具体的手法は、本シリーズでも解説されているので、省略する。

2次元圧延理論では、圧延荷重、トルク、入出口速度、圧力分布などが得られる。これより、たとえば単位幅圧延荷重 p_i は、Orowanの理論解を求める手続きを $\hat{p}$ と書くと、

$$p_i = \hat{p}(H_i, h_i, \sigma_{bi}, \sigma_{fi}, T_i, \mu_i) \quad (\text{各 } i \text{ ごとに成立}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表される。これは、入口厚さ H 、出口厚さ h 、入口張力（応力） σ_b 、出口張力（応力） σ_f 、入口温度などの変形抵抗の代表値 T 、摩擦係数 μ を、幅方向の各場所で指定すれば計算できる。また、WR半径 R やロール周速度 v_R なども指定する必要があるが、これらは幅方向で一定の既知定数である。次節以下で説明するように、圧延荷重式以外にも、被圧延材の出口速度を与える式などが現れ、いずれも式（2）と同じ形で表される。繰り返しになるが、これらの条件式は数式で表す必要はなく、計算する手続きを与えるだけでよい。

3.3 速度の拘束条件

変形域の解析にあたって、板速度の境界条件を考慮する必要がある。剛塑性モデルの立場からは、これは、塑性変形域の入口、および出口における各バンドの速度 V_i, v_i が、入側材、および出側材それぞれの「剛体運動」と整合する（＝連続である）という条件で与えられる。

$$\begin{cases} V_i = V_c + \Omega x_i \\ v_i = v_c + \omega x_i \end{cases} \quad (\text{各 } i \text{ ごとに成立}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 V_c, v_c は入側材、および出側材の並進速度、 Ω, ω は水平面内回転速度である。この条件を考慮するため、2次元圧延理論の速度式（入口または出口速度のどちらか一方）を方程式系に組み込む。これより、従来採用されていた、「入口張力の分布＋一定値＝出口張力の分布＝下流全域の張力分布」なる仮定が不要になる。左右非対称圧延の場合、回転速度 Ω, ω を導入することに対応して、これらをゼロに拘束して既知変数とするか、未知変数とする場合は、張力の水平面内モーメントの値を、たとえばゼロ（自由回転）などに指定する必要がある。

3.4 非圧縮性条件

被圧延材の体積が不変という条件は、「厚さ×幅×速度」が圧延方向の場所によらないから、

$$h_i v_i (1 + w_i) = H_i V_i \quad (\text{各 } i \text{ ごとに成立}) \cdots \cdots (4)$$

で表される。 w_i は、各バンドが入口から出口に進む間に生じる幅ひずみ(公称ひずみ)である。

3.5 合力の定義式

単スタンドの解析では、通常、入側全張力 Q_b と出側全張力 Q_f の値を指定する。このため、これら合力の定義式を方程式系に組み込む必要がある。

$$Q_b = \sum_i \sigma_{bi} H_i \partial x_i, \quad Q_f = \sum_i \sigma_{fi} h_i \partial x_i \quad (\partial x_i \text{ は各バンドの幅}) \cdots \cdots (5)$$

全張力の代わりに並進速度(V_c と v_c のどちらか一方、または両方)を指定する場合は、これらの式は未知の全張力を計算するためのものになり、方程式系からは除かれる。左右非対称圧延の場合は、入出口張力のモーメント M_b 、 M_f の定義式も必要になるが、これも式(5)と同様である。

$$M_b = \sum_i \sigma_{bi} H_i x_i \partial x_i, \quad M_f = \sum_i \sigma_{fi} h_i x_i \partial x_i \cdots \cdots (6)$$

その他、平均厚さや厚さ分布のモーメントなどの定義式を方程式系に含めておくと、たとえば、平均厚さの目標値 $\bar{h}$ を実現するためのロール開度 S_c を求めるようなとき便利である。

3.6 幅方向のメタルフローモデル

以上の方程式は、従来使われていた近似式をほとんど必然的な厳密式に置き換えただけであり、議論の余地は少ないであろう。問題は幅方向ひずみ w_i の支配方程式であり、本理論を完成するにあたって最も苦労したところである。これには、幅方向の力の釣り合い条件が本質的な役割を果たしているはずである。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (7)$$

x 、 y 、 z はそれぞれ幅方向、厚さ方向、および長さ方向の座標であり、 σ_x 等は応力成分である。

本理論における幅方向のメタルフロー式は、応力の釣り合い条件式(7)を接触長(および厚さ)内で積分して得られる。

導出は長くなるため、詳細は原論文1)を参照してほしい。ポイントは、式(7)を接触長内で積分するとき、図1に例示するような重み関数 $\phi(z)$ を掛けて積分することである。得られた結論は次式である。

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\sigma}_x}{dx} = \kappa u, & \kappa = \frac{k}{\bar{\phi}} \frac{1-r_0}{r_0 l^2} \\ \tilde{\sigma}_x = \frac{k}{2} - s + \frac{3k_0}{4r_0} w \end{cases} \quad (\text{各場所 } x \text{ ごとに成立}) \cdots \cdots (8)$$

この式は、「幅方向の圧力こう配に比例して幅方向変位が生じる⁷⁾」ことを意味している。 $\tilde{\sigma}_x$ は幅方向応力の接触長内の重み付き平均値、 u は幅方向の変位($w = du/dx$)である。 κ は、メタルフローに対する拘束を表す係数で、「拘束係数 restraint factor」と呼ぶ。これは、重み関数 ϕ の接触長内平均値 $\bar{\phi}$ に反比例する。第3式は、幅ひずみを考慮した近似降伏条件式を接触長内で積分したもので、Orowanの理論では直接得られない $\tilde{\sigma}_x$ を消去するために必要である。 k 、 s は、拘束変形抵抗と圧延圧力の重み付き平均値である。 k_0 、 r_0 は平均拘束変形抵抗と圧下率であるが、第3式の補正項は小さいため、幅方向で一定の「公称値」(＝幅方向で均一な条件を使い平面ひずみ条件として計算した値)で近似する。 l は接触長であり、これも公称値とする。

重み関数 $\phi(z)$ は、実は、接触長内で幅方向メタルフローの生じやすさを表すもので、「幅移動の容易さ lateral mobility」と名付けた。拘束係数 κ は、入出口境界における面内せん断応力とロールからの摩擦力による拘束の程度を表し、通常は摩擦力による拘束が支配的である。

平均圧延圧力 s は、通常の条件では単純平均値 p/l でもほとんど問題ないが、後に第4章で述べる特殊な圧延条件では重み ϕ を考慮する必要がある。したがって、 s は p/l とは別の量だから、式(2)とは別に計算するが、これもOrowanの理論解を数値積分して得られる。

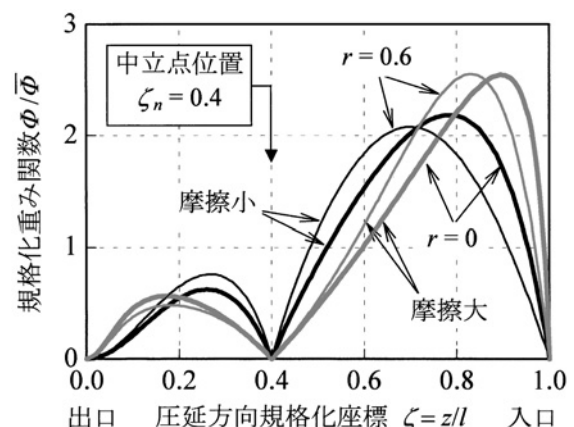


図1 重み関数(幅移動の容易さ)の例

3.7 方程式系の数値解法

以上で、一般化2次元圧延理論の方程式系が完結する。幅方向のメタルフロー式 (8) は微分方程式であるが、差分法で離散化すれば代数方程式になるから、方程式系に組み込むことができる。離散化にあたって、変位 u はバンドの分割点における値とし、一方、平均圧延圧力などは各バンドの中央における値とみなせば、板端で $\sigma_x=0$ になるという条件を正しく取り扱える。

方程式系は厳密には非線形であり、Newton法による数値計算で解く。Newton法で必要になる偏微分係数のうち、とくに圧延荷重式 (2) などのOrowanの理論解は数式表示でないため、数値微分で求める。解の初期値には、幅方向で一定条件として計算した「公称値」を使えば、方程式系の非線形性はあまり強くなく、高々10回程度の反復計算で収束する。

4 剛塑性FEMとの比較

本理論は多くの冷間、および熱間圧延実験と比較検証されている¹⁾。しかし、実験との比較では、サーマルクラウンなどの外乱があり、高い精度の検証は難しい。このため、本稿では剛塑性FEM⁹⁾と比較し²⁾、「本理論では圧延現象をどのように解釈するか」を議論しておこう。

4.1 圧延条件

計算条件は、4-high millによる熱間圧延である。入側厚さ $H=10\text{mm}$ 、出側厚さ $h=7\text{mm}$ 、幅 $b=1,000\text{mm}$ とする。このとき、図2に示すように、潤滑条件を幅方向の場所を変えるなどの方法で、摩擦係数 μ が幅方向で異なる条件を想定した。Case-1は均一な条件、Case-2は幅中央部の摩擦係数が小さい条件、Case-3は板端部で潤滑を強くした場合であり、摩擦係数の平均値は、いずれの場合も $\mu=0.2$ である。この特殊な条件は、本理論の力学モデルを議論するのに適している。また、ロールの弾性変形がない条件でも一部比較する。

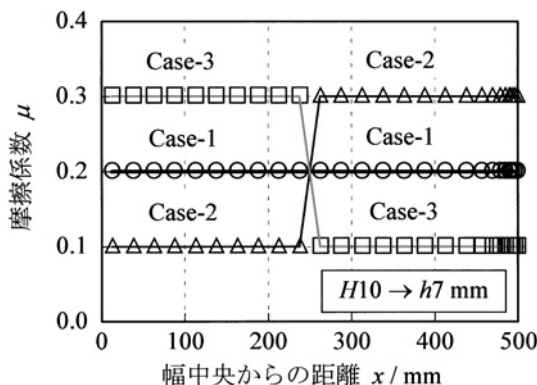


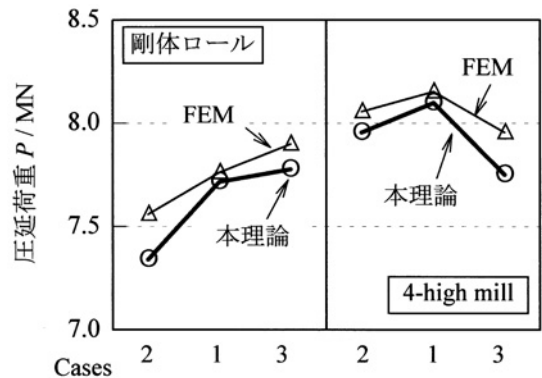
図2 想定する摩擦係数の幅方向分布

4.2 圧延荷重と幅広がり

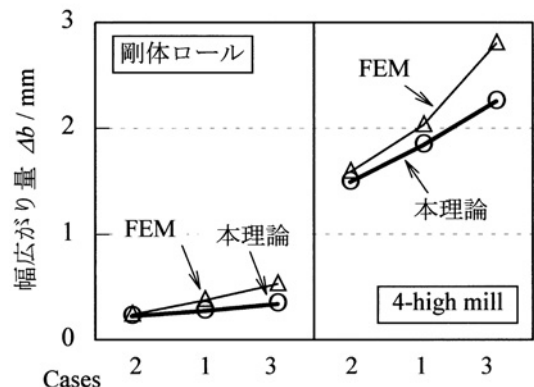
図3に圧延荷重 P と幅広がり Δb の計算結果を比較する。 Δb はCase-2→1→3の順に一定の傾向で変わるのに対して、 P は特異な挙動を示している。FEMでは、「計算したらそうなった」としか言えないであろう。本理論でも、説明可能ではあるが、かなり微妙な現象である。

まず、圧延荷重の特異な挙動は、「圧延荷重に対する摩擦係数の影響は、フリクションヒルの大きい低張力(圧縮応力)域の方が大きい」ことが本質的な原因である。しかし、そのことがどう関係するかの説明はかなり煩雑になるため、ここではこれ以上立ち入らず、このような特殊な挙動までFEMとほぼ同じ結果を与えることを示すにとどめる。なお、本理論ではFEMより圧延荷重を3%程度小さく評価している。これは、「実際には、板表面で相当ひずみが大きくて変形抵抗が大きくなるため、固着摩擦域の摩擦応力がOrowanの理論より大きい」ことによる。

次に、幅広がり量 Δb がCase-2→1→3の順に大きくなる理由は、「幅広がりに対する抵抗力は、幅方向変位の大きい板端部におけるものが支配的であり、このため、拘束係数 κ が板端部で大きい方が幅広がりが小さい」と説明される。幅方向のメタルフロー式 (8) を使って、より詳しく数学的に説明することも可能である。



(a) 圧延荷重の計算値



(b) 幅広がりの計算値

図3 圧延荷重と幅広がりの比較

4.3 分布変数の計算値

図4、5に、入口張力 σ_b と出口張力 σ_f の分布を示す。これらは、摩擦係数の不連続点で不連続的に変化している。この挙動は以下のように説明される。たとえば、 μ の小さい所では、入出口張力が隣のバンドと同じであるとすれば、Orowanの理論より圧力が小さくなるため、隣のバンドからメタルが流入しようとする。しかし、圧延後の長さは隣と同じで、厚さも不連続的には変化できないから、メタルの不連続的な流入は不可能である。このため、入出口張力が圧縮側に移行して圧力が高くなり、隣のバンドからのメタル流入を阻止する。一方、どのバンドも板速度が同じという拘束条件のため、出口張力は張力側に、入口張力は圧縮側に移行して、 μ の小さいバンドの速度を他のものと同じにする。出口張力は、この両方の効果がキャンセルするため影響は小さいが、入口張力は、両方の影響が加算されて、 μ の小さい所で大きく圧縮側に移行する。

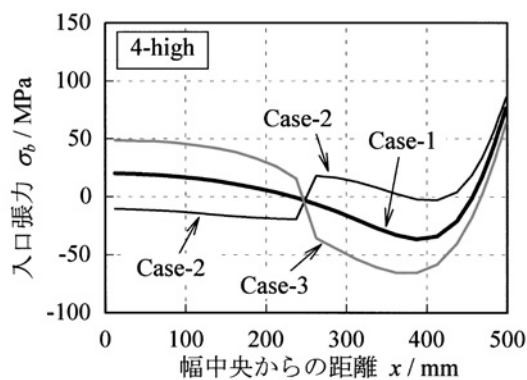
このように、張力分布の発生機構は、変形域の境界が入出側材という「剛体」で拘束されていることが本質であり、出口張力分布が決まってから入口張力分布が決まるわけではない。通常、入口張力と出口張力の分布はほぼ等しくなるが、摩擦係数が分布するような場合は、別のものになる。なお、FEMでは最板端で張力が少し小さくなっているが、理由は

不明である。

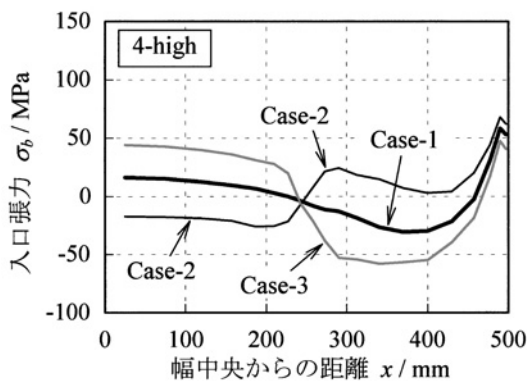
図6には、単位幅あたりの荷重 p の分布を示す。 p も摩擦係数 μ の不連続点で不連続的に変化している。FEMでは変化がなだらかであるが、これは、計算を安定にするため、少しゆるやかな μ の変化を指定しているためである。

それでは、なぜ μ の小さい側で荷重が小さくなるのであろうか？ これは2次元圧延理論におけるように当然のことではない。すなわち、入出口で変形が拘束されているため、 μ の不連続点で急激なメタルフローが生じるわけではないから、幅方向のメタルフロー式 (8) より、幅方向の応力 $\tilde{\sigma}_x$ は連続的にしか変化できない。もし、同式第3式中の s が単純な平均圧延圧力 p/l と同じものであるなら、このことは、 μ が小さいバンドの境界応力が圧縮側になって、 p/l 、したがって単位幅荷重 p が隣と同じになることを意味する。実際には p は μ の不連続点で変化しているから、「幅方向メタルフローの駆動力」である s は p/l とは別のものでなければならない。 s が「幅移動の容易さを重みとした平均圧延圧力」で定義されているのは、この機構を反映したものである。

最後に、図7に出側厚さ分布を比較する。本モデルとFEMとで、定性的な傾向は一致するが、定量的にはFEMの方が厚さ分布に対する摩擦係数分布の影響が大きい。これは、 p の分布に見られたわずかな差が強調されて現れたもの

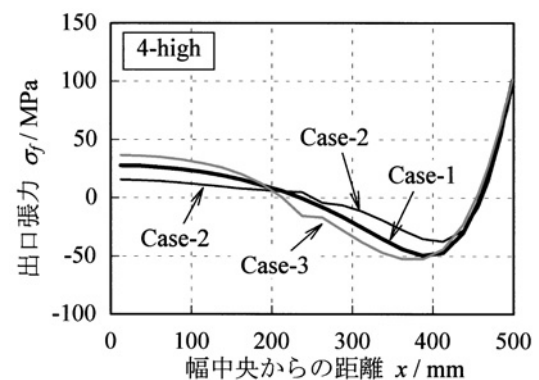


(a) 本理論

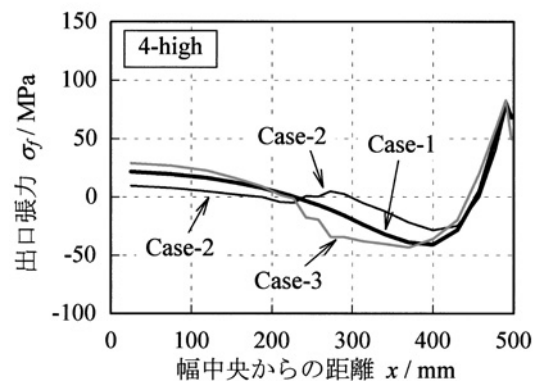


(b) FEM

図4 入口張力分布の比較

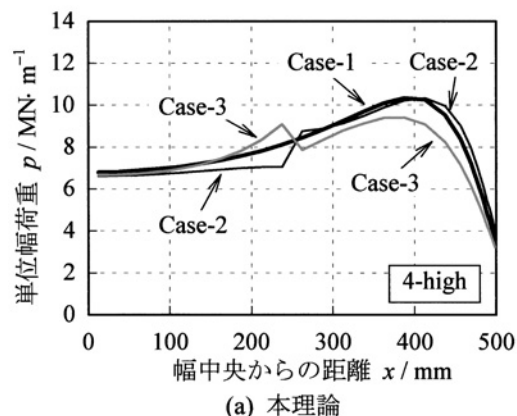


(a) 本理論

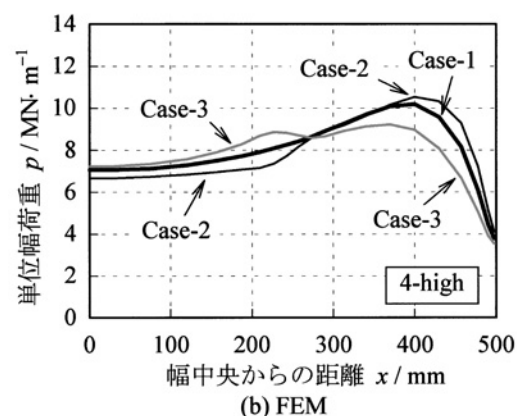


(b) FEM

図5 出口張力分布の比較

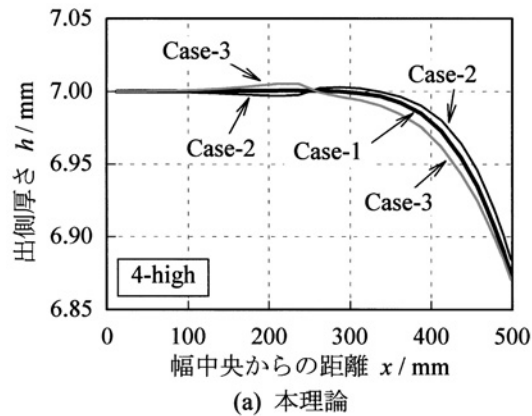


(a) 本理論

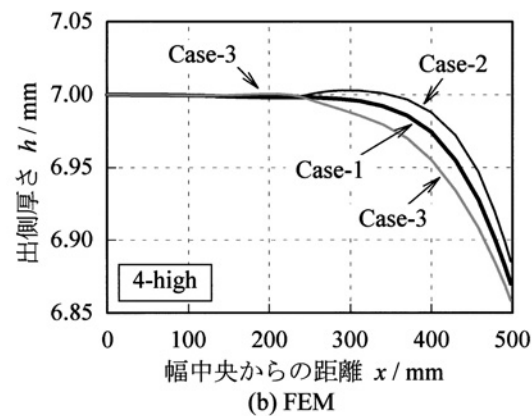


(b) FEM

図6 単位幅荷重分布の比較



(a) 本理論



(b) FEM

図7 出側厚さ分布の比較

である。この差は、幅方向メタルフロー式 (8) を導くときに設けている近似にもよるであろうが、「FEMでは、とくにロールバイト入側の非接触域で変形が進行している」ことの方が、より重大な原因であると思われる。この「予変形」は本理論では考慮できないものであり、「それでもよく一致している」と言うべきであろう。

5 おわりに

「一般化2次元圧延理論」による疑似3次元解析理論の体系を説明した。本理論は、単に短時間で計算できるということだけでなく、力学機構の解明に有用である。読者には、「FEMで計算したらそうなった」ということで満足せず、その力学機構を議論するよう期待する。本理論は、従来は机上検討のためのものであったが、現代では、動的シミュレーションやオンライン制御モデルに適用し、実機操業の精度向上に活用すべきであると思う。

参考文献

- 1) 松本紘美, 濱渦修一, 山田健二: 塑性と加工, 37 (1996) 430, 1162, 1168.

- 2) H. Matsumoto and K. Yamada: Advanced Technology of Plasticity, Proc. of the 5th Int. Conf. on Technology of Plasticity, 1 (1996), 3.
- 3) H. Matsumoto and Y. Taketani: Advanced Technology of Plasticity, Proc. of the 6th Int. Conf. on Technology of Plasticity, 3 (1999), 1909.
- または、松本紘美: 第51回塑性加工連合講演会論文集, (2000), 495.
- 4) K. N. Shohet and N. A. Townsend: J. I. S. I., 206 (1968) 11, 1088.
- 5) 鈴木 弘, 都築信男, 津田 統: 日本機械学会講演論文集, 710 (1971) 2, 241.
- 6) 戸澤康壽, 中村雅勇, 石川孝司: 塑性と加工, 17 (1976), 37, 980.
- 7) 松本紘美, 中島浩衛, 菊間敏夫, 上堀雄司: 塑性と加工, 23 (1982) 263, 1201.
- 8) 松本紘美: 第92・93回西山記念技術講座, 日本鉄鋼協会, (1983), 1.
- 9) K. Yamada, S. Ogawa and M. Ataka: Proc. 4th Int. Conf. of NUMIFORM '92, (1992), 755.

(2002年1月4日受付)