

# 入門講座

圧延理論入門-9

## 有限要素法を利用した圧延理論

Rolling Theory Using the Finite-Element Method

小森和武  
Kazutake Komori

大同工業大学 情報機械システム工学科  
助教授

### 1 はじめに

今までの入門講座において、様々な圧延理論が紹介された。すなわち、2次元圧延理論<sup>1)</sup>、混合摩擦域の圧延理論<sup>2)</sup>、そして板プロフィール解析のための3次元圧延理論<sup>3, 4)</sup>ではスラブ法が紹介された。一方、形鋼圧延解析のための3次元圧延理論と幅広がり式<sup>5)</sup>では上界法(エネルギー法)が紹介された。

スラブ法を用いて圧延解析を行うためには、様々な仮定を用いて、圧延荷重や圧延トルク等の計算式を誘導する必要がある。実際に、これらの入門講座においてはこれらの計算式が詳細に誘導された。ここで、これらの計算式を他の金属加工の解析に利用することはできない。すなわち、スラブ法による計算式は、金属加工様式に依存する。一方、スラブ法による解析において必要な計算時間は非常に短い。すなわち、2次元圧延理論における計算時間は事実上ゼロであり、3次元圧延理論における計算時間は数秒程度である。

有限要素法(FEM)は、あらゆる工学の分野において利用されている汎用的な解析法である。そして、金属加工の解析のための有限要素法は既に確立されている。ここで、圧延加工の解析のための有限要素法は、金属加工の解析のための有限要素法とほとんど変わらない。すなわち、有限要素法は金属加工様式にほとんど依存しない。そのため、本入門講座では圧延加工の解析のための有限要素法を簡単に説明する。一方、有限要素法による解析において必要な計算時間は非常に長い。すなわち、2次元解析における計算時間は数分程度であり、3次元解析における計算時間は数時間程度である。

本入門講座ではまず、圧延加工の解析のための様々な解析法を紹介する。次に、解析法に重点を置いて様々な解析結果を紹介する。

### 2 解析法

#### 2.1 静的FEMと動的FEM

表1に静的FEMと動的FEMの比較を示す。静的FEMにおいて、静的な力の釣合式を解くためには、全節点の全変位成分を未知数とする連立一次方程式を解かなければならない。そして、計算時間の大部分がこの連立一次方程式を解くために使われる。ここで、連立一次方程式を解くために必要な計算時間は未知数の3乗に比例する。すなわち、節点数が2倍になれば、計算時間は8倍になる。

動的FEMは、計算時間が長いという静的FEMの短所を改良するために提案された。動的FEMにおいて、動的な運動方程式を解くためには、各節点の各変位成分毎に独立した一次方程式を解けばよい。すなわち、連立一次方程式を解く必要がない。ここで、一次方程式を解くために必要な計算時間は式の数に比例する。すなわち、節点数が2倍になれば、計算時間は2倍になる。しかし、独立した一次方程式を得るために、大胆な近似が行われるため、動的FEMの計算精度は低い。

以前には、金属加工の解析に静的FEMだけが用いられた。しかし最近では、動的FEMもまた金属加工の解析に用いられる。静的FEMを用いた場合、板成形加工の解析に必要な計算時間は数ヶ月程度である。そこで現在では、板成形加工の解析に動的FEMが主に用いられる。一方、静的FEMを用いた場合、圧延加工の解析に必要な計算時間は数時間程度である。そのため、圧延加工の解析に動的FEMはほとんど

表1 静的FEMと動的FEMの比較

	静的 FEM	動的 FEM
基礎式	静的な力の釣合式	動的な運動方程式
計算精度	高い	低い
計算時間	長い	短い

用いられない。そこで、本入門講座では静的FEMだけを取り上げる。

## 2.2 弾塑性FEMと剛塑性FEM

表2に弾塑性FEMと剛塑性FEMの比較を示す。弾塑性FEMでは、材料は弾塑性体であると仮定される。そして、降伏点において応力-ひずみ曲線の傾きが不連続になるため、計算時間が長い。一方、剛塑性FEMでは、材料は剛塑性体であると仮定される。そして、応力-ひずみ曲線の傾きがすべてのひずみにおいて連続になるため、計算時間が短い。なお、スラブ法では材料は剛塑性体であると仮定された。

以前には、圧延加工の解析に剛塑性FEMが主に用いられた。しかし最近では、残留応力が求まることが長所である、弾塑性FEMもまた圧延加工の解析によく用いられる。なお、文献6)に金属加工の解析のための弾塑性FEMと剛塑性FEMが詳しく解説されている。

## 2.3 様々な剛塑性FEM

剛塑性変形する材料の体積は変化しない、という条件を満足させるために、様々な剛塑性FEMがある。表3に様々な剛塑性FEMの比較を示す。ここで、ラグランジュ未定乗数法及びペナルティ法は、材料の体積一定の条件を満足させる方法を表す。一方、圧縮性材料特性法では、材料の体積が変化する降伏関数が用いられる。ここで、ペナルティ法及び圧縮性材料特性法では、材料の体積がわずかに変化する。ラグランジュ未定乗数法では、各節点の各変位成分のみならず各要素の静水圧応力が未知数になるため計算時間が長い。一方、ペナルティ法及び圧縮性材料特性法では、各節点の各変位成分だけが未知数になるため、計算時間が短い。

## 2.4 一般化平面ひずみ解析法と3次元解析法

ある方向のひずみがゼロである変形を平面ひずみ変形と呼ぶ。

2次元圧延理論<sup>1)</sup>及び混合摩擦域の圧延理論<sup>2)</sup>では平面ひずみ変形が仮定された。すなわち、板幅方向のひずみはゼロであった。当然ではあるが、有限要素法による2次元解析においても、平面ひずみ変形が仮定される。

ある方向のひずみが、その方向に垂直な断面内において、一様である変形を一般化平面ひずみ変形と呼ぶ。圧延方向のひずみが圧延方向に垂直な断面内において一様である、一般化平面ひずみ変形を仮定した解析がしばしば行われる。表4に一般化平面ひずみ解析法と3次元解析法の比較を示す。

一般化平面ひずみ解析法ではまず、材料全体が圧延方向に垂直な数多くの断面により数多くのスラブに分割される。そして、各スラブが剛塑性FEMにより解析される。ここで、圧延方向ひずみは、スラブに作用する圧延方向の力が釣り合うように決められる。すなわち、一般化平面ひずみ解析法は剛塑性FEMとスラブ法を組み合わせた解析法である。なお、各スラブ毎に解析が行われるため、一般化平面ひずみ解析法の計算時間は短い。

なお上記の一般化平面ひずみ解析法では、スラブの厚さがゼロでないため、3次元解析が行われる。一方、圧延方向ひずみが既知であると仮定する簡略化された一般化平面ひずみ解析法がある。この簡略化された解析法では、スラブの厚さがゼロであるため、2次元解析が行われる。

## 2.5 定常解析法と非定常解析法

空間の任意の位置の物理量、例えば応力やひずみ等が時間に依存しない状態を定常状態と呼ぶ。材料先端部あるいは材料後端部は、圧延中に定常状態になく非定常状態にある。一方、材料先端部及び材料後端部を除く材料中央部は、圧延中に定常状態にある。材料先端部及び材料後端部の材料中央部に対する割合は非常に小さい。したがって、非定常状態にある材料の変形を通常解析する必要はない。そこで、本入門講座では定常状態にある材料の変形だけを取り上げる。

定常状態の材料の変形を求めるために、定常解析法と非定常解析法がある。表5に定常解析法と非定常解析法の比較を示す。

定常解析法では、解析より得られた節点変位を使って材料の流線を求める。そして、流線を使って材料の外形状や空間の任意の位置の物理量を修正する。すなわち、材料の外形状

表2 弾塑性FEMと剛塑性FEMの比較

	弾塑性 FEM	剛塑性 FEM
弾性変形	考慮する	考慮しない
残留応力	求まる	求まらない
計算時間	長い	短い

表3 様々な剛塑性FEMの比較

	ラグランジュ未定乗数法	ペナルティ法	圧縮性材料特性法
降伏関数	ミーゼス	ミーゼス	島・大矢根
体積変化	ない	ある	ある
計算時間	長い	短い	短い

表4 一般化平面ひずみ解析法と3次元解析法の比較

	一般化平面ひずみ解析法	3次元解析法
圧延方向ひずみ	一様	任意
計算精度	低い	高い
計算時間	短い	長い

表5 定常解析法と非定常解析法の比較

	定常解析法	非定常解析法
要素の固定対象	空間	材料
計算精度	高い	低い
計算時間	短い	長い

形状を流線に一致させる。また、空間の任意の位置の物理量をその物理量の流線に沿う積分値に一致させる。ここで、外形形状や物理量が収束した時、材料は定常状態であると判断する。なお、スラブ法では定常解析法が用いられた。

非定常解析法では通常非定常解析が行われる。材料の変形量が十分大きい時、空間の任意の位置の物理量は振動する。その振動の周期は、通常その位置を1要素が通過する時間に等しい。そして、その振動の周期及び振幅が一定値になった時、材料は定常状態であると判断する。すなわち、定常状態において物理量は振動するため、非定常解析法の計算精度は低い。また、振動の周期及び振幅が一定値になる時の材料の変形量は十分大きいため、非定常解析法の計算時間は長い。

表より、定常解析法は非定常解析法よりも優れている。そこで、剛塑性FEMでは定常解析法が用いられる。しかし、弾塑性FEMでは降伏点において応力-ひずみ曲線の傾きが不連続になる。そのため、定常解析法を用いた場合、一般に外形形状や物理量が収束しない。そこで、弾塑性FEMでは非定常解析法が用いられる。ここで、定常状態の材料の変形を求めるために、“非”定常解析法を用いることに注意する。

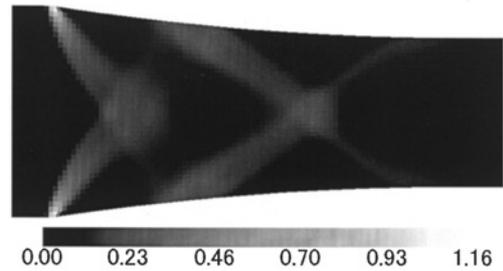
### 3 解析結果

#### 3.1 平面ひずみ圧延

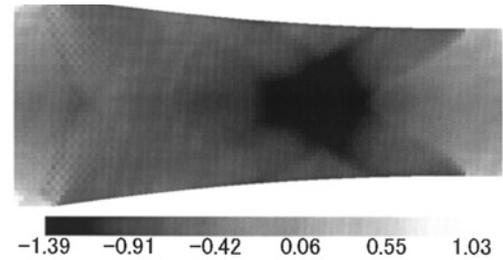
剛塑性FEMによる2次元解析は、森ら<sup>7)</sup>及びLi and Kobayashi<sup>8)</sup>により初めて行われた。図1に筆者による剛塑性FEMによる解析で得られた相当ひずみ速度分布と静水圧応力分布を示す。材料とロールの接触開始点において相当ひずみ速度が大きい。そして、接触開始点から圧延下流でありまた板厚中央である方向に相当ひずみ速度が大きい領域が存在する。すなわち、相当ひずみ速度は板厚方向に均一ではない。同様に、静水圧応力は板厚方向に均一ではない。

2次元均一変形理論<sup>1)</sup>では、各スラブ内において応力は板厚方向に均一であると仮定された。また、2次元不均一変形理論<sup>1)</sup>では、各スラブ内において応力は板厚方向に線形に変化すると仮定された。従って、スラブ法による解析から上記の不均一を得ることはできない。しかし、スラブ法による解析結果の精度が比較的良好なことはよく知られている。そのため、スラブ法は現在においても十分価値がある。

図2にスラブ法及び剛塑性FEMによるロール接触面圧力

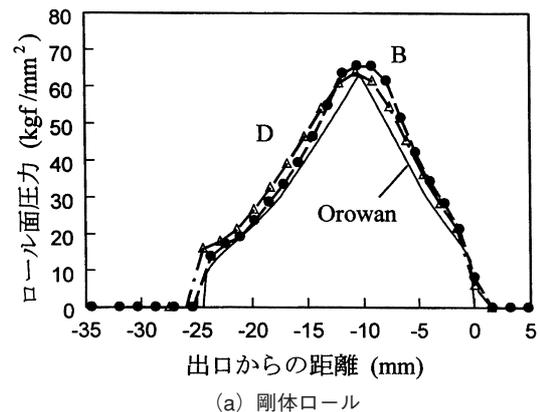


(a) 相当ひずみ速度分布

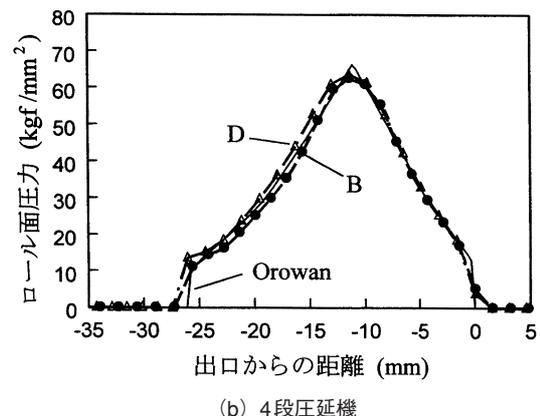


(b) 静水圧応力分布

図1 相当ひずみ速度分布と静水圧応力分布



(a) 剛体ロール



(b) 4段圧延機

図2 ロール接触面圧力分布

分布を示す<sup>9)</sup>。図より、2次元不均一変形理論<sup>1)</sup>による圧力分布(Orowan)は剛塑性FEMによる圧力分布(B, D)とよく一致する。ただし、スラブ法による圧力は、剛塑性FEMによる圧力よりも若干小さい。

玉野ら<sup>10)</sup>は、弾塑性FEMにより圧下率が1%以下である調質圧延の解析を行った。この解析では、微小変形理論が用いられた。また、材料の変形量が極めて小さいため、定常解析法が用いられた。

大変形理論を用いた弾塑性FEMによる2次元解析は、Argyrisら<sup>11)</sup>、鏑田ら<sup>12)</sup>そしてLiuら<sup>13)</sup>により行われた。これらの解析では、中立点近傍において材料がロールに固着すること、すなわち材料速度がロール周速と一致すること、及び中立点近傍以外において材料とロールがすべり接触することが考慮された。なお、これらの解析では非定常解析法が用いられた。

なお、文献9)では数多くの剛塑性FEMあるいは弾塑性FEMによる解析結果が比較された。図3に圧延圧力分布及び摩擦応力分布を示す<sup>9)</sup>。図より、数多くの解析結果の間の相違は小さい。また、剛塑性FEMによる解析結果(A, B, C, D, E, F)と弾塑性FEMによる解析結果(G, H, I)はあまり異なるない。

### 3.2 板の圧延

まず、剛塑性FEMによる板の近似3次元解析が森・小坂田<sup>14,15)</sup>により行われた。これら研究では近似3次元要素が提案された。ここで、近似3次元要素の内部では、圧延方向変位及び板幅方向変位は板厚方向に変化しないと仮定された。したがって、近似3次元要素を用いた解析による計算精度は、通常の3次元要素を用いた解析による計算精度よりも低い。一方、近似3次元要素の独立した節点変位成分の数は、通常の3次元要素の独立した節点変位成分の数よりも少ない。したがって、近似3次元要素を用いた解析による計算時間は、通常の3次元要素を用いた解析による計算時間よりも短い。しかし、近似3次元要素を用いると、板厚方向要素数は1に限定されるため、現在では、通常の3次元要素を用い

た解析が行われる。一方、井口・鏑田<sup>16)</sup>は剛塑性FEMによる板の3次元解析を行った。この研究では、中立点近傍における材料とロールの固着を考慮した解析法が提案された。なお、弾塑性FEMを用いた板の3次元解析はLiuら<sup>17)</sup>及びLee<sup>18)</sup>により行われた。

剛塑性FEMによる板の3次元解析とロールの弾性変形の解析を組み合わせた解析は柳本ら<sup>19,20)</sup>及び古元ら<sup>21)</sup>により行われた。これらの研究では、材料形状が収束するまで材料の変形解析とロールの変形解析が交互に行われた。ここで、ロール軸のたわみの解析にShohet and Townsend<sup>22)</sup>による方法が用いられた。また、ロール表面の変形解析に修正半無限体モデルと呼ばれる弾性解<sup>23)</sup>または弾性FEMが用いられた。ここで、弾性解による計算時間は事実上ゼロである。図4に板幅方向の板厚分布を示す<sup>20)</sup>。図より、解析結果が実験結果とよく一致すること、またロールクラウンがエッジドロップに大きな影響を及ぼすことがわかる。

文献9)では数多くの剛塑性FEMによる解析結果が比較された。図5に単位板幅当たりの圧延荷重の分布を示す<sup>9)</sup>。図より、剛体ロールによる圧延荷重の分布と4段圧延機による圧延荷重の分布が大きく異なることがわかる。また、文献9)では弾性解である修正半無限体モデルによる解析結果と弾性FEMによる解析結果がほとんど一致することが示された。

### 3.3 棒鋼・線材の圧延

一般化平面ひずみ変形を仮定した棒鋼・線材圧延の解析が木内・柳本<sup>24)</sup>、岡田ら<sup>25)</sup>、Kimら<sup>26)</sup>そしてHsiang and Lin<sup>27)</sup>により行われた。

剛塑性FEMによる棒鋼・線材圧延の3次元解析は、森・小坂田<sup>28-30)</sup>、Park and Oh<sup>31)</sup>、二階堂ら<sup>32)</sup>そして柳本ら<sup>33,34)</sup>により行われた。一方、小森<sup>35)</sup>は解析に必要な記憶容量が小さい3次元解析の方法を提案した。そして、提案した解析法

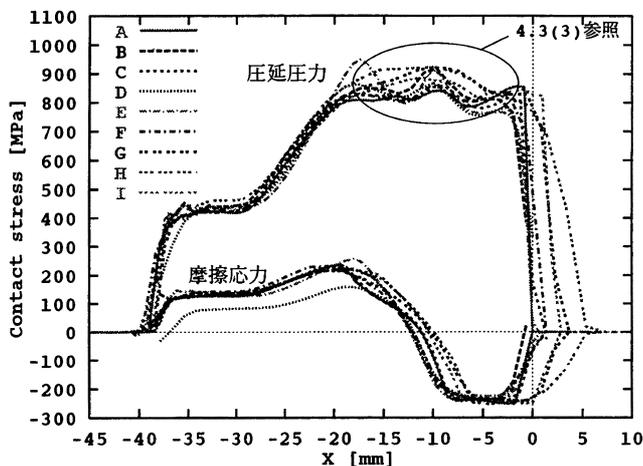


図3 圧延圧力分布及び摩擦応力分布

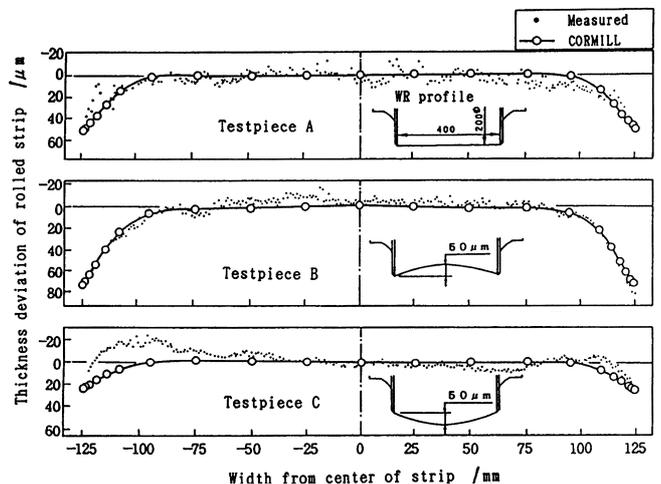


図4 板幅方向の板厚分布

による解析結果が通常の解析法による解析結果と完全に一致することを示した。図6に角一楕円圧延における材料形状を示す<sup>35)</sup>。材料とロールの接触開始点を正確に求めるために、接触開始点近傍の節点が圧延方向に移動させられている。

棒鋼・線材圧延は熱間加工であるため、変形解析のみならず温度解析を行う必要がある。そこで、Montmitonnetら<sup>36)</sup>および小森<sup>37,38)</sup>は棒鋼・線材圧延の変形解析及び温度解析を行った。これらの研究では、材料形状と温度分布が収束するまで変形解析と温度解析が交互に行われた。なお、熱間圧延では材料は高温、ロールは室温である。そのため、材料とロールの接触面近傍で温度が急激に変化する。この急激な温

度変化を解析で求めるために、接触面近傍の要素分割を非常に細かくする必要がある。しかし、細かい要素分割は膨大な計算時間及び記憶容量を必要とする。そのため、3次元解析において接触面近傍の要素分割を細かくすることはできない。そこで文献37, 38)では、接触面近傍の領域の温度分布を1次元差分法により、その他の領域の温度分布を3次元有限要素法により求める方法が提案された。図7に1次元差分法により求めた接触面近傍の温度分布を示す<sup>37)</sup>。図より、ロール周速が温度分布に大きな影響を及ぼしている。

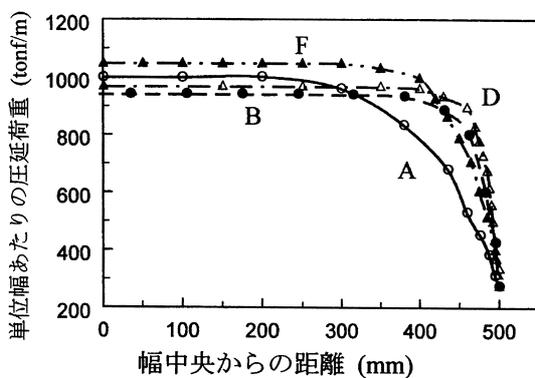
さて、高強度で高靱性の棒鋼・線材を得るために圧延中の材料の微視的組織を知る必要がある。そこで、根石ら<sup>39)</sup>及び柳本ら<sup>40)</sup>は棒鋼・線材圧延の変形解析及び温度解析をもとに、材質予測モデルを使って材料の微視的組織を予測した。

一方、棒鋼・線材圧延の汎用3次元解析システムが開発された<sup>41,42)</sup>。これらのシステムの利用者はGUIを利用してデータの入出力を行える。また、これらのシステムを利用することにより、圧延プロセス設計や孔型設計を容易に行える。

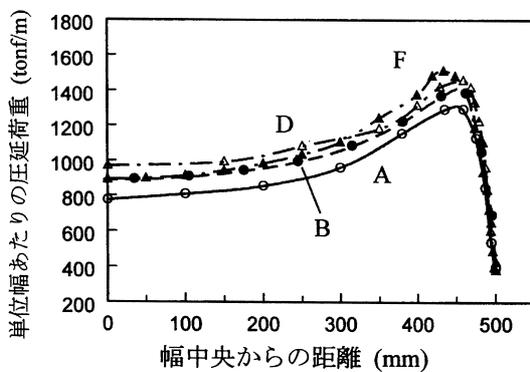
### 3.4 形鋼・管材の圧延

一般化平面ひずみ変形を仮定した形鋼・管材圧延の解析が行われた。すなわち、柳本・木内<sup>43)</sup>及びKimら<sup>44)</sup>によりH形鋼圧延の解析が行われた。また、山田ら<sup>45)</sup>により延伸圧延の、Glowacki<sup>46)</sup>により軌条圧延の、そして森ら<sup>47)</sup>により穿孔圧延の解析が行われた。図8に延伸圧延後の横断面形状を示す<sup>45)</sup>。図より、解析結果は実験結果とよく一致する。材料形状が複雑な場合、一般化平面ひずみ変形を仮定した解析法は現在においても有効な解析法である。

剛塑性FEMによる形鋼・管材圧延の3次元解析が行われ



(a) 剛体ロール



(b) 4段圧延機

図5 単位板幅当たりの圧延荷重の分布

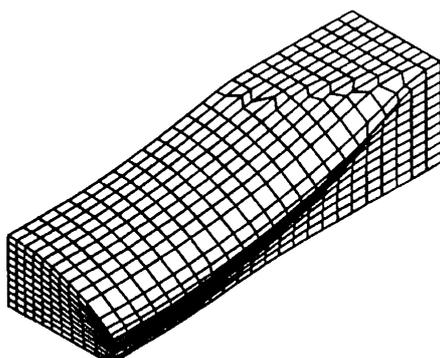


図6 角一楕円圧延における材料形状

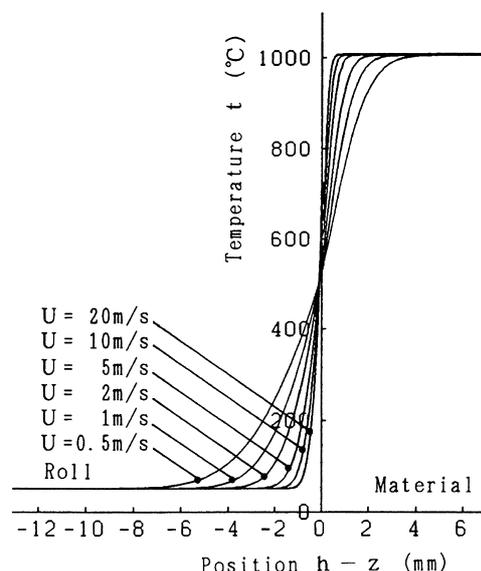


図7 接触面近傍の温度分布

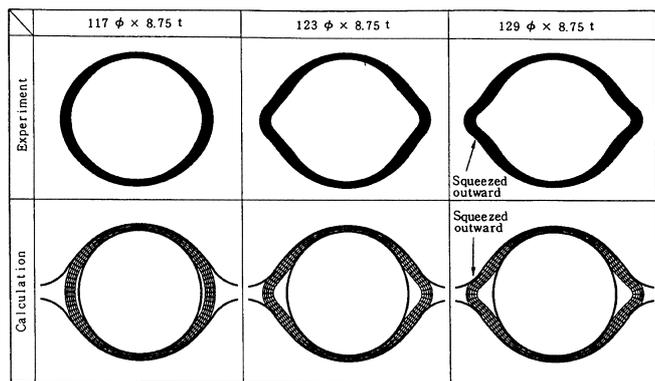


図8 延伸圧延後の横断面形状

た。すなわち、森ら<sup>48,49)</sup>により絞り圧延の、森ら<sup>28,29)</sup>及び井口ら<sup>50)</sup>によりH形鋼圧延の、山田ら<sup>51)</sup>により延伸圧延の、そして柳本ら<sup>52,53)</sup>により山形鋼圧延の解析が行われた。図9にH形鋼圧延の材料形状を示す<sup>29)</sup>。ウェブ部の接触面形状はフランジ部の圧下量に依存している。

さて、形鋼・管材圧延は熱間で行われるため、温度解析を行うことは重要である。小森・香村<sup>54)</sup>は実生産ラインのH形鋼圧延の変形解析及び温度解析を行った。そして、圧延後の温度分布を使って、2次元熱弾塑性FEMにより冷却後の残留温度分布を求めた。図10に圧延後の温度分布及び冷却後の残留応力分布を示す<sup>54)</sup>。図より、圧延後の材料から周囲への熱伝達率が残留応力分布に大きな影響を及ぼしている。

## 4 おわりに

有限要素法を用いた圧延解析の概要を紹介した。現在では、数千個の要素を用いた3次元解析を通常のパソコンにおいて実行できる。この入門講座が、これから有限要素法を用いた圧延解析を始める方々の参考になることを希望する。

### 参考文献

- 1) 戸澤康壽：ふえらむ，7 (2002)，89.
- 2) 玉野敏隆：ふえらむ，7 (2002)，160.
- 3) 松本絃美：ふえらむ，7 (2002)，273.
- 4) 石川孝司：ふえらむ，7 (2002)，336.
- 5) 中島浩衛：ふえらむ，7 (2002)，681.
- 6) 富田佳宏：数値弾塑性力学，養賢堂，(1990)
- 7) K. Mori, K. Osakada and T. Oda：Int. J. Mech. Sci., 24 (1982)，519.
- 8) G. J. Li and S. Kobayashi：Trans. ASME, J. Eng. Ind., 104 (1982)，55.
- 9) 圧延の有限要素法による理論解析の実際，日本鉄鋼協

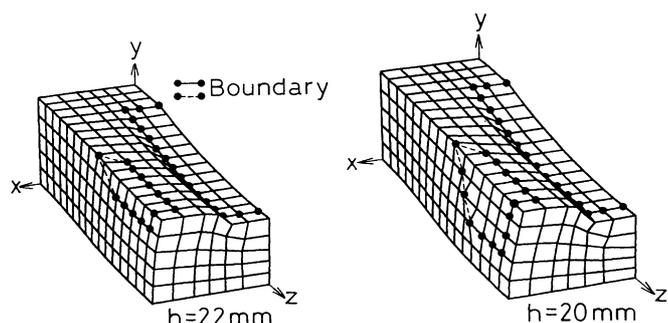


図9 H形鋼圧延の材料形状

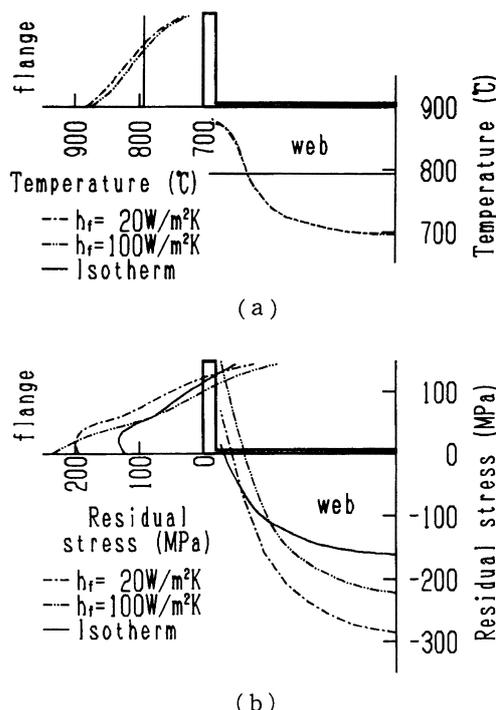


図10 圧延後の温度分布及び冷却後の残留応力分布

会編，(1998)

- 10) 玉野敏隆：塑性と加工，14 (1973)，766.
- 11) J. H. Argyris, J. S. Doltsinis, P. M. Pimenta and H. Wustenberg：Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 32 (1982)，3.
- 12) I. Yarita, R. L. Mallett and E. H. Lee：Steel Research, 56 (1985)，255.
- 13) C. Liu, P. Hartley, C. E. N. Struggess and G. W. Rowe：Int. J. Mech. Sci., 27 (1985)，531.
- 14) 森謙一郎，小坂田宏造：塑性と加工，23 (1982)，897.
- 15) K. Mori and K. Osakada：Int. J. Mech. Sci., 26 (1984)，515.
- 16) T. Iguchi and I. Yarita：ISIJ Int., 31 (1991)，559.
- 17) C. Liu, P. Hartley, C. E. N. Sturgess and G. W.

- Rowe : *Int. J. Mech. Sci.*, 29 (1987), 271.
- 18) J. D. Lee : *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 161 (1998), 315.
- 19) 柳本潤, 木内学: 塑性と加工, 32 (1991), 1007.
- 20) 柳本潤, 佐々木保, 木内学, 河野輝雄: 塑性と加工, 33 (1992), 1406.
- 21) 古元秀昭, 森本和夫, 林寛治, 小坂田宏造: 塑性と加工, 37 (1996), 1059.
- 22) K. N. Shohet and N. A. Townsend : *J. Iron and Steel Inst.*, 206 (1968), 1088.
- 23) 松本紘美, 中島浩衛, 菊間敏夫, 上堀雄司: 塑性と加工, 23 (1982), 1201.
- 24) 木内学, 柳本潤: 塑性と加工, 30 (1989), 19.
- 25) 岡田達夫, 小坂田宏造, 森謙一郎, 古元秀昭: 日本機械学会論文集A, 56 (1990), 1893.
- 26) N. Kim, S. M. Lee, W. Shin, R. Shivpuri : *Trans. ASME J. Eng. Ind.*, 114 (1992), 329.
- 27) S. H. Hsiang and S. L. Lin : *Int. J. Mech. Sci.*, 43 (2001), 1155.
- 28) K. Mori and K. Osakada : *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30 (1990), 1431.
- 29) 森謙一郎, 小坂田宏造: 日本機械学会論文集A, 56 (1990), 1288.
- 30) 森謙一郎, 小坂田宏造: 日本機械学会論文集A, 57 (1991), 1357.
- 31) J. J. Park and S. I. Oh : *Trans. ASME J. Eng. Ind.*, 112 (1990), 36.
- 32) 二階堂英幸, 林宏之, 侍留誠, 瀬戸恒雄, 直井孝之: 塑性と加工, 31 (1990), 378.
- 33) 柳本潤, 木内学, 井上幸雄: 塑性と加工, 34 (1993), 75.
- 34) 柳本潤, 木内学, 井上幸雄: 塑性と加工, 34 (1993), 81.
- 35) K. Komori : *Int. J. Mech. Sci.*, 40 (1998), 479.
- 36) P. Montmitonnet, J. L. Chenot, C. Bertrand-Corsini, C. David, T. Iung and P. Buessler : *Trans. ASME J. Eng. Ind.*, 114 (1992), 336.
- 37) 小森和武: 日本機械学会論文集A, 59 (1993), 2993.
- 38) 小森和武: 日本機械学会論文集A, 62 (1996), 1045.
- 39) 根石豊, 秋山雅義, 井上欣広, 川上浩一郎: 塑性と加工, 38 (1997), 637.
- 40) J. Yanagimoto, T. Ito and J. Liu : *ISIJ Int.*, 40 (2000), 65.
- 41) 柳本潤, 木内学, 宮澤英之, 浅川基男: 鉄と鋼, 86 (2000), 452.
- 42) 佐古崇, 山下雅司: 電気製鋼, 73 (2002), 189.
- 43) 柳本潤, 木内学: 塑性と加工, 31 (1990), 384.
- 44) N. Kim, T. Altan and S. Kobayashi : *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 31 (1991), 553.
- 45) 山田将之, 山田建夫, 小坂田宏造, 岡田達夫: 塑性と加工, 34 (1993), 1270.
- 46) M. Glowacki : *J. Mat. Proc. Tech.*, 62 (1996), 229.
- 47) K. Mori, H. Yoshimura and K. Osakada : *J. Mat. Proc. Tech.*, 80/81 (1998), 700.
- 48) 森謙一郎, 小坂田宏造, 三原豊, 平川智之, 福田正成: 塑性と加工, 28 (1987), 1054.
- 49) 森謙一郎, 三原豊, 曾谷保博, 秋田真次: 塑性と加工, 32 (1991), 1262.
- 50) 井口貴朗, 林宏之, 鏑田征雄: 塑性と加工, 35 (1994), 959.
- 51) 山田健二, 小川茂, 濱渦修一, 菊間敏夫: 塑性と加工, 36 (1995), 384.
- 52) 柳本潤, 木内学, 柴田一良, 井上幸雄: 塑性と加工, 36 (1995), 41.
- 53) 柳本潤, 木内学, 柴田一良: 塑性と加工, 36 (1995), 713.
- 54) 小森和武, 香村克彦: 日本機械学会論文集A, 64 (1998), 729.

(2002年10月9日受付)