入門講座
計測・制御技術入門　制御技術-2

サンプル値制御系入門―サンプル点間応答を考慮した設計

Introduction to Sampled-data Control Systems – Design Considering the Intersample Behavior

山本　裕　Yutaka Yamamoto　京都大学　大学院情報学研究科　複雑系科学専攻　教授

永原正章　Masaaki Nagahara　京都大学　大学院情報学研究科　複雑系科学専攻

1 はじめに

連続時間プラントを離散時間補償器で制御する系をサンプル値制御系という。離散時間補償器で制御する理由はさまざまである。例えば系の挙動が一定時間間隔ごとにしか観測できない場合、離散的に補償器を構成する方が制御用コンピュータとの関わりで有利な場合、などである。連続時間と離散時間補償器のインタフェイスをとるために、連続時間出力を一定時間ごとに観測するサンプラーと離散時間出力を連続時間の関数に変換するホールド要素が必要となる。後者では、離散時間出力をサンプル周期の長さだけ一定に保つ0次ホールドが多く用いられる。

いずれにせよ明らかな問題は、このような動作により、サンプル点の間での挙動が連続時間補償器と異なってくることである。

簡単な例によりこの事情を見てみよう。図1のサンプル値単一フィードバック系を考える。

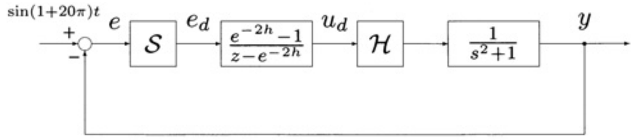

図1　サンプル値単一フィードバック系

これは自然周波数1 rad / secの連続時間プラント$1/(s^2+1)$をサンプル周期 $h=0.1$として離散時間コントローラで安定化し、目標入力 $r(t)=\sin(1+20\pi)t$に対する応答を計算したものである。次の図2で分かるように、サンプル点間に大きなリップルが生じてしまっている。

この現象が生じるわけは、このトラッキング信号が $\sin t$ のエイリアス成分であり、したがってサンプル点上ではこの応答はトラッキングを達成している。しかしサンプル点間では大きなリップルが生じるが、この情報はサンプリングのために離散時間コントローラには伝わらない。したがってこのシステムは離散時間トラッキングは達成するものの、大きなサンプル点間リップルを発生してしまう。

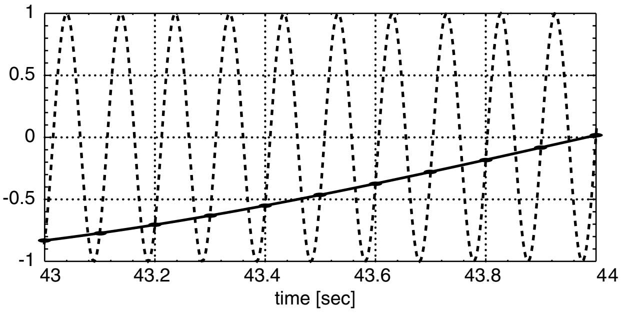

図2　時間応答
実線：トラッキング信号；点線：時間応答

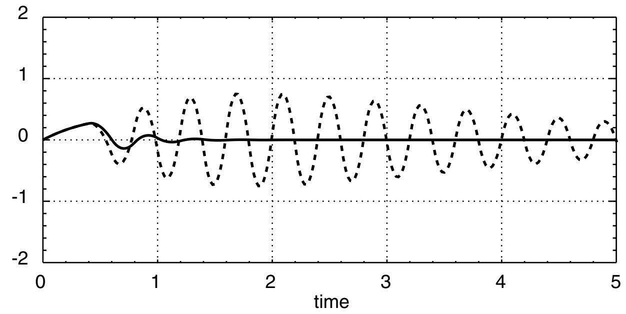

図3　H^2設計応答 $h=0.2$

さらに詳しく見ると、システムの応答はこの$\sin t$に漸近している。これはプラントの自然周波数が1 rad / secであって、このプラント自身が$\sin t$の内部モデルとして働いていることによる。トラッキング信号がサンプル点上では$\sin t$と一致しているため、閉ループ系はトラッキングを達成していると誤認したと見ることもできよう。

今ひとつシミュレーション結果のグラフだけを挙げておこう（図3）。これは2次の振動系に対して、インパルス応答の

L^2ノルムを最小化するH^2設計を行ったものである。実線はサンプル値設計を行ったもの、点線は離散時間設計を行ったものでサンプル点間の応答が評価されていない。直ちに分かるようにサンプル点上の値のみを評価する離散時間設計では非常に大きなリップルが生じている。

このようにサンプル値制御系では注意しないとサンプル点での応答はよく制御出来ているように見えても、サンプル点間で望ましくない応答が発生し得る。それではこのような望ましくない応答を生じないように制御系を設計するにはどのようにすればよいであろうか。次章以降これに関する近年の発展を簡単に解説しよう。

2 リフティング

上で見たようにサンプル値制御系ではサンプル点間リップルを抑え、好ましい応答を得ることが目標となる。サンプル周期を短く取ったとしてもサンプル点間応答を評価していないと必ずしもよい結果が得られないことは上で注意したとおりである。またプラント制御などでは種々の制約からサンプル周期を短く取ることが必ずしも可能ではない。これらのことから、サンプル点間応答を性能評価に取り込んだ設計法が望まれる。しかしながら、このような設計法が確立したのはそう旧いことではなく、1990年代以降の発展によるものである。以下では旧来のアプローチと対比しつつ、このサンプル値制御系の新しい設計法について解説する。なお、参考文献は膨大なので、ChenとFrancisによる成書[3]、および筆者らによる解説[10,9]などを参照されたい。

2.1 古典的モデル

さて次のような連続時間系が与えられたとしよう。

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx \cdots\cdots (1)$$

これに対して、サンプル点で離散時間入力 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ が入力され、それに0次ホールドをかけたとすると、このシステム(1)の挙動は

$$x_{k+1}=e^{Ah}x_k+\int_0^h e^{A\tau}Bd\tau u_k \cdots\cdots (2)$$

$$y_k=Cx_k \cdots\cdots (3)$$

で与えられる。ただしここでhはサンプル周期、$x_k=x(kh)$、$u_k=u(kh)$、$y_k=y(kh)$である。これによりサンプル点上の挙動を記述するパルス伝達関数は

$$C(zI-e^{Ah})^{-1}\int_0^h e^{A\tau}Bd\tau$$

として求まることになる。こうして得られたモデル(2)を離散時間補償器で安定化したとすると、少なくともそのサンプル点上での挙動は安定化されることになる。しかしすでに見たようにこれではサンプル点間の挙動は保障されない。サンプル点間では有限時間間隔$[kh,(k+1)h)$で定値入力が入るだけであり、しかもこの入力はサンプル点上のモデルとそれを安定化して得られた閉ループ系で定まるので、外部入力が0であれば0に収束する。したがって、サンプル点間での挙動もいずれは0に収束する。言い換えればサンプル値系の安定性はサンプル点上の挙動で決定される。これが古典的に(2)をサンプル値系の離散時間モデルとして採用してきた根拠であった。

しかし過渡特性はこれでは保証されず、しかもサンプル点間の挙動はすでにモデル(2)では失われてしまっている。これではサンプル点間応答を保証する設計はできない。しかし一方では、サンプル点間応答をモデルに持ち込むと時不変モデルではなくなり、時変系になってしまう。この問題を解消したのが次に述べるリフティングの概念であった。

2.2 リフティング

連続時間プラント(1)において、時刻$t=kh$で状態が$x_k=x(kh)$であったとし、この時点から、h秒後までに入力$u(t)$がシステムに入ったとする。その間の状態遷移、出力値は

$$x(kh+\theta)=e^{A\theta}x_k+\int_{kh}^{kh+\theta}e^{A(kh+\theta-\tau)}Bu(\tau)d\tau \cdots\cdots (4)$$

$$x(kh+\theta)=Ce^{A\theta}x_k+\int_{kh}^{kh+\theta}Ce^{A(kh+\theta-\tau)}Bu(\tau)d\tau \cdots\cdots (5)$$

となる。リフティングの特徴はサンプル点間の時間パラメータを時間と思わず、単なるパラメータと捉えることにある。特徴は、入出力をこのまま関数を要素とする列ととらえるところにある[7,8,2]。

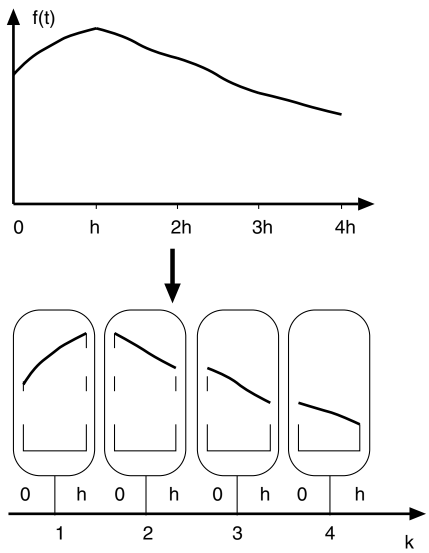

図4 リフティング

具体的には

$$W: L^2[0,\infty) \to L^2[0,h]: \phi(t) \to \{\phi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty},$$
$$\phi_k(\theta) := \phi(kh+\theta) \quad \cdots\cdots (6)$$

という対応を考え、入力や出力関数をL^2（他のものでも良い）関数の列としてしまうのである（図4参照）。このような関数列 $\{\phi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ に対し、そのz変換 $\hat{\phi}$ は通常と形式的に全く同様に

$$\hat{\phi}(\theta) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\theta) z^{-k} \quad \cdots\cdots (7)$$

と定義されるのである[8]。ただしz変換されたものもパラメータθの関数であることに注意しよう。

これを用いて連続時間系（1）のモデルをたてよう。上と同様時刻khにおけるxの状態をx_kとし、区間$[kh, (k+1)h)$で入力$u_k(\theta)$、$0 \leq \theta < h$が入ったとすると、次の時点$t=(k+1)h$での状態x_{k+1}とその間の出力$y_k(\theta)$は（4）、（5）より容易に

$$x_{k+1} = e^{Ah}x_k + \int_0^h e^{A(h-\tau)}Bu_k(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots (8)$$
$$y_k(\theta) = Ce^{A\theta}x_k + \int_0^{\theta} Ce^{A(\theta-\tau)}Bu_k(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots (9)$$

と表される。すなわち、関数の入力ベクトル$u_k(\cdot)$、離散時間状態x_k、関数の出力ベクトル$y_k(\cdot)$、$k=0, 1, 2, \ldots$の状態遷移式が得られた。ここで上の式に現れるθはもはや時間変数ではなく、単なるパラメータである。このことに注意して、上の式を

$$x_{k+1} = \mathcal{A}x_k + \mathcal{B}u_k \quad \cdots\cdots (10)$$
$$y_k(\theta) = \mathcal{C}x_k + \mathcal{D}u_k \quad \cdots\cdots (11)$$

と形式的に書くことができる。しかもこれは（各作用素$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$がkによらないと言う意味で）時不変のシステム方程式である。

この時不変のモデルは次の利点を持つ：

1. 連続時間系が時不変の離散時間系として表されたので、離散時間コントローラとの結合が時不変系として自在に行なえる。
2. サンプル値系の伝達関数が定義できる。

3 伝達関数と定常特性

上で得られたモデルを使って実際にサンプル値制御系の伝達関数を求めてみよう。まずシステム（10）,（11）の**伝達関数**は、明らかに$\mathcal{D}+\mathcal{C}(zI-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$と定義するべきである。すなわち実際には形式的に"両辺をz変換する"だけで良い。違いはサンプル点間応答を記述するパラメータθが入っていることである。

より一般的に、サンプル値系をリフティングすると（10）,（11）と全く同様に

$$x_{k+1} = \mathcal{A}x_k + \mathcal{B}u_k, \; y_k(\theta) = \mathcal{C}x_k + \mathcal{D}u_k \quad \cdots\cdots (12)$$

となることが分かる。しかもこのとき$\mathcal{A}$はサンプル点毎の状態遷移を表しているので、$\mathcal{A}$は常に行列となり、かつこの系（12）の**安定性**は行列$\mathcal{A}$の固有値の絶対値が全て1より小であることと同値であることも容易に確かめられる[3,8]。これはまた伝達関数$\mathbf{G}(z) = \mathcal{D}+\mathcal{C}(zI-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$の極が全て単位円内に含まれることと同値である。

以上の安定性の定義の下で、離散時間系の場合に類似した次の事実が一般的に成り立つ。

定理3.1　$\mathbf{G}(z)$をリフティングされた安定なサンプル値系の伝達関数とする。このとき指数型入力$r_k(\theta) = \{\lambda^{k-1}v(\theta)\}$、$|\lambda| \geq 1$にたいする応答は$\lambda^{k-1}[\mathbf{G}(\lambda)v](\theta)$に漸近する（図5参照）。

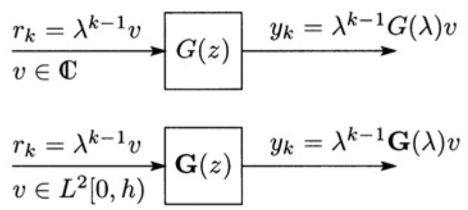

図5　定常応答：離散時間系（上）、サンプル値系（下）

これより次のことが分かる。

- $\lambda=1$のときは定常応答が存在し、$[\mathbf{G}(1)v](\theta)$で与えられる。
- $|\lambda|=1$のときは応答は漸近的に$[\mathbf{G}(\lambda)v](\theta)$に各サンプル時刻ごとに$\lambda$を乗じて位相をずらせたものとなる。

この性質により、サーボ系の定常リップルの特徴付け、内部モデル原理などが得られる[8]。また一方これは**定常応答**の定義を与えているとも考えられる。次章ではこれに基づいてサンプル値系の周波数応答を導入する。

4 周波数応答

正弦波入力$e^{j\omega t}$が与えられたとする。いま$t=kh+\theta$と第kステップのサンプル変数を導入すると、$e^{j\omega t} = (e^{j\omega h})^k e^{j\omega\theta}$となるから、これをリフティングしたものは$\{e^{j\omega kh}e^{j\omega\theta}\}_{k=0}^{\infty}$

である。従って前章の結果を用いると安定な伝達関数$\mathbf{G}(z)$に対する“定常応答”は

$$e^{j\omega kh}\mathbf{G}(e^{j\omega h})(e^{j\omega\theta}),\ k=0,1,2,\ldots$$

となる。ここで位相遅れ要素$e^{j\omega kh}$を無視した部分$\mathbf{G}(e^{j\omega h})(e^{j\omega\theta})$を周波数応答と呼ぶのは自然に見える。しかし既に第1章で述べたように、このような離散の角周波数$e^{j\omega h}$を導くのは$e^{j\omega t}$だけではない。そのほかにも

$$e^{j(\omega+2n\pi/h)t},\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

と無数にあり、その間の事情を反映するのがむしろサンプル値系の周波数応答としては自然であろう。したがって、$L^2[0,h]$からそれ自身への作用素（を周波数ωの関数としてみたもの）

$$\mathbf{G}(e^{jwh}):L^2[0,h]\rightarrow L^2[0,h]\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

を**周波数応答**と呼び、その中で最大の拡大率

$$\|\mathbf{G}(e^{jwh})\|=\sup_{v\in L^2[0,h]}\frac{\|\mathbf{G}(e^{jwh})v(\theta)\|}{\|v(\theta)\|}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (14)$$

ωでの**ゲイン**と呼ぶ。このようにすると、上で述べた事情を反映して周波数ωの上に乗った全てのエイリアス成分に対する最大のゲインを見積もったことになっている。

5 ファーストサンプル近似によるサンプル値制御系の解析と設計

前章までの議論により、連続時間信号をリフティングすることによって、サンプル値制御系は（無限次元の）離散時間系として記述できること、またサンプル値系にたいする周波数応答や伝達関数の概念が自然に導入されることがわかった。これによりサンプル点間の応答を考慮した設計が可能となる。実はこのようにリフティングされたモデルは無限次元系ではあるものの、それに対して定式化されたH^∞制御問題などは実は本質的に有限次元の問題に帰着され得ることが知られている[1,3,4,10]。しかしこの等価離散時間系の導出はかなり面倒であるだけではなく、得られた等価系が一般には設計で要求する閉ループ系のH^∞ノルムの値（これを性能レベルと呼ぼう）に依存すると言う性質を持つ。これは設計した後でないと定まらない。このため、設計に当たってはある目標性能レベルを設定して等価離散時間系を計算し、それに基づいて設計を行い、満足できなければまた新たな性能レベルを設定して等価離散時間系の計算に戻って設計を繰り返すという作業を要求されることになる。これはかなりの計算量の増加をまねく。

現実にはこれに代わるファーストサンプルファーストホールド（Fast-Sample Fast-Hold, FSFH）近似という手法が知られている[5,11]。これはサンプル点間の入力と出力を、それぞれ階段関数で近似するもので、多くの場合（閉ループ系のゲインなどにも依存するが）H^∞制御ではサンプル周期を5分割程度に細分することで十分な近似精度が得られる。これによると、得られたモデルは単なる離散時間系で、性能レベルに依存せず、しかもサンプル周期を細分しているのでサンプル点間応答も評価に反映されていることになる。

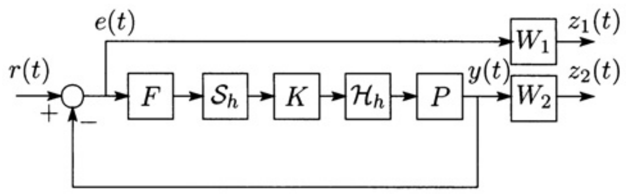

図6　サンプル値単一フィードバック系

これについて説明しよう。まず、図6のサンプル値単一フィードバック系を考える。ここでPは連続時間プラント、Kは離散時間コントローラであり、$\mathcal{S}_h$、$\mathcal{H}_h$はそれぞれサンプリング周期がhの理想サンプラ、零次ホールドである。また、サンプラの前のFはアンチエリアシングフィルタである。ここでは混合感度問題を考え、W_1、W_2は連続時間の重み関数とする。プラントPおよび、アンチエリアシングフィルタF、重み関数W_1、W_2の実現をそれぞれ、$\{A_P, B_P, C_P, 0\}$、$\{A_F, B_F, C_F, 0\}$、$\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$、$\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$とおく。

FSFHの手法は、図7のように連続時間系Gの入出力信号にたいして高速で動作するサンプラ$\mathcal{S}_{h/N}$および零次ホールド$\mathcal{H}_{h/N}$を接続することにより、離散時間系に近似する手法である。この近似は、図8に示すように、入力の連続時間信号を階段関数で近似し、出力の連続時間信号を高速でサンプルすることに相当する。ここで、分割数Nを大きくしていけば、近似離散時間系の性能はもとのサンプル値系の性能に近

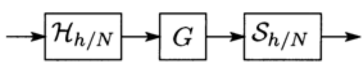

図7　ファーストサンプルファーストホールド（FSFH）

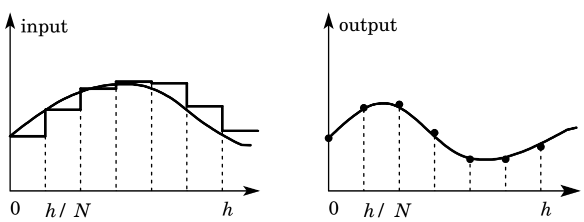

図8　FSFHによる連続時間入出力信号の離散時間近似

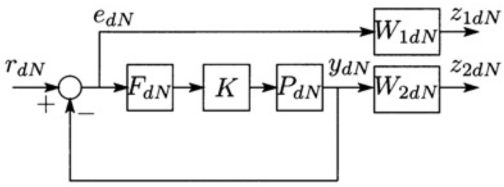

図9　FSFHによる近似離散時間系

づいていくことが示されている[11)]。また分割数Nをどれくらいにとれば良いのかが問題となるが、文献6）では分割数Nにたいする近似誤差の評価が与えられ、設計の指標となる。

このFSFHを導入すれば、図6のサンプル値系は図9の離散時間系へと変換される。ここで、P_{dN}、F_{dN}、W_{idN}（i＝1，2）は離散時間系で、それらの状態空間実現は次式で与えられる。

$$P_{dN}(z):=\left[\begin{array}{c|c} A_{dP} & B_{dP} \\ \hline C_P & 0 \\ C_PA_{dP} & C_PB_{dP} \\ \vdots & \vdots \\ C_PA_{dP}^{N-1} & C_PA_{dP}^{N-2}B_{dP} \end{array}\right],$$

$$A_{dP}:=e^{A_Ph},\ B_{dP}:=\int_0^h e^{A_Pt}B_Pdt,$$

$$F_{dN}(z):=$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A_{dF}^N & A_{dF}^{N-1}B_{dF} & A_{dF}^{N-2}B_{dF} & \cdots & B_{dF} \\ \hline C_F & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right],$$

$$A_{dF}:=e^{A_Fh/N},\ B_{dF}:=\int_0^{h/N} e^{A_Ft}B_Fdt,$$

$$W_{idN}(z):=$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A_{di}^N & A_{di}^{N-1}B_{di} & A_{di}^{N-2}B_{di} & \cdots & B_{di} \\ \hline C_i & D_i & 0 & \cdots & 0 \\ C_iA_{di} & C_iB_{di} & D_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_iA_{di}^{N-1} & C_iA_{di}^{N-2}B_{di} & C_iA_{di}^{N-3}B_{di} & \cdots & D_i \end{array}\right],$$

$$A_{di}:=e^{A_ih/N},\ B_{di}:=\int_0^{h/N} e^{A_it}B_idt,\quad i=1,\ 2.$$

なお、これらの導出は文献5）、3）を参照のこと。

図9のブロック線図を用いて離散時間コントローラを設計するには、MATLAB等の数値計算ソフトウェアを用いるのがよい。例えばMATLABではRobust Control Toolboxの`dhinf`関数、μ Analysis and Synthesis Toolboxの`dhfsyn`関数、LMI Toolboxの`dhinflmi`関数などを用いれば、容易に最適なH^∞コントローラが得られる。

6 設計例

本章では、前章で与えられたFSFH設計公式を用いて混合感度問題を解く。ここで、サンプル周期はh＝1とし、

$$P(s)=\frac{20-s}{(s+0.01)(s+20)},\ F(s)=\frac{1}{(0.5/\pi)s+1},$$

$$W_1(s)=\frac{1}{(2.5/\pi)s+1},\ W_2(s)=\frac{(2.5/\pi)s}{(2.5/\pi)s+1},$$

とする。この例題は文献3）に掲載されている設計例を少し変更したものである。FSFHの分割数をN＝5ととる。また、比較のためにサンプル点間応答を考慮しない離散時間設計（FSFHでN＝1ととった場合）も行う。

得られたコントローラのボード線図を図10に示す。サンプル値設計コントローラは離散時間設計のコントローラに比べ、低周波ではゲインがいくぶん高い一方、ナイキスト周波数付近で離散時間設計のコントローラはハイゲインになっている。また、位相では、0.1 rad / secあたりから違いが見られる。

次にサンプル値系の周波数応答を見てみよう。図6において入力rから出力eまでのシステムをS（感度関数）、入力rから出力yまでのシステムをT（相補感度関数）とおく。入力rから出力［z_1，z_2］^{T}までのシステム［W_1S，W_2T］のサンプル値系の周波数応答を図11に示す。離散時間設計では、ナイキスト周波数付近でゲインが高くなっている。この離散時間設計のゲインのピークはサンプル点間応答のリップルを引き起こすので有害である。一方、サンプル値設計で得られた周波数応答はよりフラットな特性で、このようなピークは見られない。

また、サンプル値設計および離散時間設計によって得られ

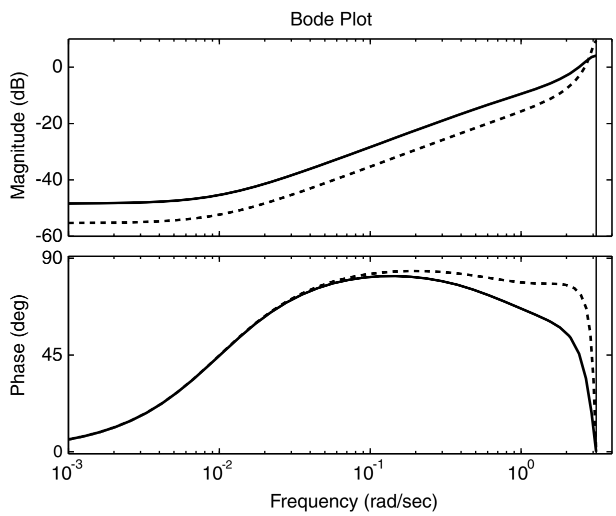

図10　コントローラのボード線図
サンプル値設計（実線）、離散時間設計（破線）

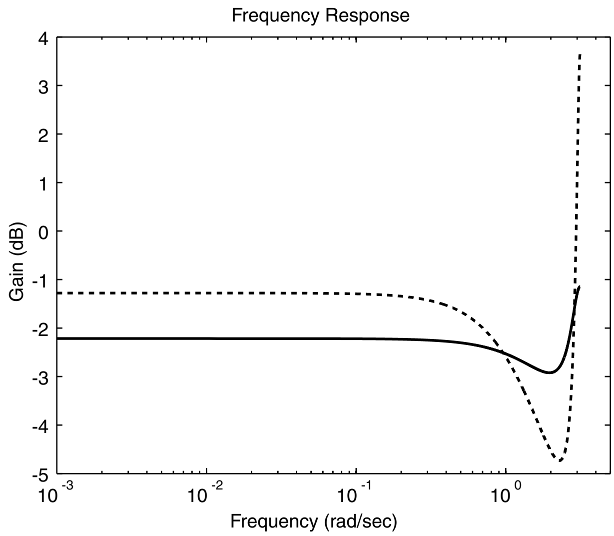

図11　サンプル値制御系の周波数応答
サンプル値設計（実線）、離散時間設計（破線）

表1　感度関数、相補感度関数のH^{∞}ノルム

	$\|W_1 S\|_\infty$	$\|W_2 T\|_\infty$
サンプル値設計（$N=5$）	0.762	0.622
離散時間設計（$N=1$）	0.863	1.348

た$\|W_1 S\|_\infty$および$\|W_2 T\|_\infty$の値を表1に示す。この表からも、離散時間設計に比べサンプル値設計が有利であることがわかる。

7 おわりに

現代的なサンプル値制御について解説した。なお、紙幅の制約もあり、挙げた文献は解説、成書を中心としたので、オリジナルの文献を参照したわけではないことをお断りしておく。文献3)、9)、10）などを参照されたい。

参考文献

1）B. Bamieh and J. B. Pearson：A general framework for linear periodic systems with applications to H∞ sampled-data control，IEEE Trans. Autom. Control，AC-37，(1992)，418-435.
2）B. Bamieh，J. B. Pearson，B. A. Francis and A. Tannenbaum：A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control systems，Syst. Control Lett.，17 (1991)，79-88.
3）T. Chen and B. A. Francis： Optimal Sampled-data Control Systems，Springer，(1995)
4）P. T. Kabamba and S. Hara：Worst case analysis and design of sampled data control systems，IEEE Trans. Autom. Control，AC-38，(1993)，1337-1357.
5）J. P. Keller and B. D. O. Anderson：A new approach to the discretization of continuous-time controllers，IEEE Trans. Autom. Control，AC-37，(1992)，214-223.
6）Y. Yamamoto，B. D. O. Anderson and M. Nagahara：Approximating sampled-data systems with applications to digital redesign，Proc. of 41th Conf. on Decision and Control，(2002)，3724-3729.
7）Y. Yamamoto： New approach to sampled-data systems，a function space method，Proc. 29th CDC，(1990)，1882-1887.
8）Y. Yamamoto： A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems，IEEE Trans. Autom. Control，AC-39，(1994)，703-712.
9）Y. Yamamoto：Digital control，Wiley Encylopedia of Electrical and Electronics Engineering，5 (1999)，445-457.
10）山本，原，藤岡：サンプル値制御理論I－VI：システム／制御／情報，43 (1999)，436-443，561-568，660-668，；44 (2000)，78-86，223-231，336-343.
11）Y. Yamamoto，A. G. Madievski and B. D. O. Anderson：Approximation of frequency response for sampled-data control systems，Automatica，35 (1999)，729-734.

（2003年3月5日受付）