

入門講座

計測・制御技術入門 制御技術-3

最適制御とゲインスケジューリング

Optimal Control and Gain Scheduling

内田健康
Kenko Uchida

早稲田大学
理工学部電気・情報生命工学科 教授

1 はじめに

最適制御とゲインスケジューリングは、いずれも制御手法の一つであるという共通点を除けば、出自も経歴も対極にあるといってよい制御手法である。最適制御は、ポントリヤーギンを中心とするロシアの数学者グループによる最大原理によって、またベルマンのハミルトンヤコビ方程式による動的計画法によって基礎付けられた制御手法である。その後も特定分野（例えば、宇宙航空工学の分野）における応用、あるいは特別な場合（例えば、線形システムに対する2次形式評価の最適制御）の応用を除けば、主に理論的な研究が先行してきた制御手法である。一方、ゲインスケジューリングは、現場の制御技術として生まれ、極めて有効な技術であることは認識されているが、数多くのシミュレーションだけが頼りの理論的な性能保証のない制御手法である。最近、この二つの制御手法に関して新しい展開が進行中である。最適制御に関しては、モデル予測制御との融合とそのための高速計算法の開発である。ゲインスケジューリングに関しては、LPV (Linear Parameter Varying) システムモデルに基づく理論的な裏付けをもった構成法の開発である。

本講義の目標は、最適制御およびゲインスケジューリングについて解説することである。上記のようにまったく異なる背景を持ったこの二つの制御手法について、定値目標の変更に対する追従制御問題という共通の設定の中で対比しながら、それぞれの概要を述べてみたい。最適制御については最大原理に焦点を絞り、ゲインスケジューリングについてはLPVモデルに基づく新しい構成法にも触れたい。

2 制御問題

制御量が目標値を達成し平衡状態にある制御対象において、目標値を変更し新たな値を設定したとき、この変更を追

従し新しい目標を達成させる制御問題を考えよう。この制御問題に対する制御法の二つの選択肢として、最適制御およびゲインスケジューリングを取り上げる。

最初に、定値目標 r_0 を維持するフィードバック制御システム（図1）について要点を整理しておく。外乱が加わって制御量が目標値から離れても速やかに元の目標値に復帰させる仕組みはフィードバック制御の代表的な機能である。制御器としては、例えば比例ゲイン、積分器そして微分器からなるPID制御が代表的である。図1の信号の流れから分かるように、フィードバック制御は制御量の目標値からの偏差を減少させる構造をもっている。実際、PID制御器のパラメータを旨く調整しておけば、ある程度の大きさの外乱や制御対象の変化に対しては、それによって生じる偏差を速やかに減少させることができる。ステップ状の外乱や同等の制御対象の変化に対しては、実際に偏差をゼロにすることも可能である。一方で、パラメータの調整を誤れば偏差を増大させて、不安定にしてしまうこともある。

PID制御器のパラメータ調整には様々な方法がある。その詳細については本入門講座の第1回の講義（ふえらむVol.8 No.4 230頁）に譲ることにして、ここでは、本稿の主題である最適制御とゲインスケジューリングの議論への橋渡しを兼ねて、PID制御器のパラメータ調整と制御対象のモデルとの関係を整理しておこう。PID制御器のパラメータ調整法としては、1) 第一に、実際に制御対象を用いた実機実験による調整である。この方法は制御対象のモデルを必要としない

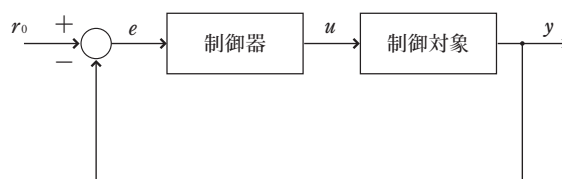


図1 フィードバック制御

代わりに、調整のための繰り返し実験ができる環境がなければならぬ。実機実験による調整には試行錯誤が避けられないが、制御対象に関する特有の情報を得ることができれば、経験的な指針（例えば、限界感度法）に従うことにより試行錯誤のステップを減らすことが可能である。2) 一方、制御対象のモデル（一般に、非線形モデル）が与えられていれば、実機実験の代わりに計算機シミュレーションを通してパラメータを調整することが可能であり、より系統的な調整が可能である。特に動作点の近傍における線形化モデルを用いれば、その動作点の近傍においては一定の性能を理論的に保証する調整が可能である。

PID 制御器の一つの特長はパラメータ調整に必ずしもモデルを必要としない簡便さにあるが、後の議論のために、ここでは、上記2) の最後で述べた線形化モデルに基づく制御器として考えよう。まず、制御対象の非線形モデルをつぎのように与える。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x)\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

x は状態、 u は操作量（制御入力）、 y は制御量（被制御出力）であり、1 入力 1 出力とする。目標値を r_0 とすると、平衡状態を実現する動作点 $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}) = (r_0, x(r_0), u(r_0))$ はつぎの方程式

$$\begin{aligned}0 &= f(\bar{x}, \bar{u}) \\ r_0 &= \bar{y} = g(\bar{x})\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

の解として与えられる（この解を求める一つの方法を4章で述べる）。動作点が求まれば、動作点からの偏差

$$\begin{aligned}\delta y &= y - \bar{y} \quad (e = r_0 - y = -\delta y) \\ \delta x &= x - \bar{x} \\ \delta u &= u - \bar{u}\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

に関する、線形化モデル

$$\begin{aligned}\delta \dot{x} &= A(r_0) \delta x + b(r_0) \delta u \\ \delta y &= c(r_0) \delta x \\ A(r_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}), \quad b(r_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \\ c(r_0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

が得られる。なお、線形化モデルは一般に動作点の近傍でのみ有効なモデルであることに注意したい。このときPID 制御器の設計は、この線形化モデルと線形制御理論を用いて、できるだけ速やかにそして必要な安定余裕を持って、目標値追従を実現するように、PID 制御器

$$\delta u = K_P \delta y + K_I \int \delta y dt + K_D \frac{d}{dt} \delta y \quad \dots\dots\dots (5)$$

のパラメータを決定することである。決定されたパラメータを $(K_P(r_0), K_I(r_0), K_D(r_0))$ とすると、図1のフィードバ

ック制御システムにおいては、実際には

$$\begin{aligned}\delta u &= K(r_0) e \\ &= -K_P(r_0) e - K_I(r_0) \int e dt - K_D(r_0) \frac{d}{dt} e \quad \dots\dots\dots (6)\end{aligned}$$

で与えられる。

さて、目標値の変更に対する追従制御問題に取り掛かることにしよう。いま、目標値 r_0 を達成するようにパラメータを調整したPID 制御器によってフィードバック制御を構成しているとする（図1）。この状態から目標値を r_1 に変更したとき、この変更に対して制御量を速やかに追従させるための制御法として、本章の冒頭に述べたように、1) 最適制御（フィードフォワード制御）と2) ゲインスケジューリング（フィードバック制御＋スケジューリング）について検討する。この検討は次節以降で行うことにして、本章では、変更前の目標値に対して調整されたPID 制御器をそのまま用いるフィードバック制御について簡単に触れておこう。

目標値 r_0 を達成するように調整されたPID 制御器によるフィードバック制御をそのまま用いた場合を想定しよう。 r_1 と r_0 の差が小さい時は、目標値の変更を一つの外乱とみなすことにより、良好な追従性が期待できる。しかしながら r_1 と r_0 の差が大きい場合には、過渡特性も定常特性も追従性が劣化する可能性がある。というのは、目標値の r_0 から r_1 への変更は動作点の変更を意味し、制御対象が非線形システムであれば、動作点の変更は一般に動作点の近傍での制御対象の特性が変わってしまうことを意味するからである。目標値 r_0 に対する動作点で調整されたフィードバック制御は、その動作点の近傍を離れると一般に本来の制御性能を発揮できず、場合によってはフィードバックシステムを不安定にになってしまう可能性をもっている。

3 最適制御

制御対象の正確なモデルが手に入る場合には、目標値の変更に対する追従制御問題はつぎのような最適化問題として定式化できる。制御対象のモデルは

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x)\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。目標値 $y = r_0$ を達成して平衡状態にあった制御対象において、目標値が r_1 に変更されたため $t = 0$ で制御を開始して、時刻 $t = T$ で変更された目標値 r_1 を達成することを考えよう。この制御目標は、

$$x(0) = x(r_0), \quad g(x(T)) = r_1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

という端点条件として表される。制御入力（操作量）の大きさには、実際の問題を考慮して、つぎのような制限があるでしょう。

$$u \in U = \{u \mid |u| \leq u_{\max}\} \dots\dots\dots (9)$$

この制限を満たす制御入力によってシステム (7) を制御し、制約条件 (8) を満たすことができれば目標値の変更に対する追従は達成されるが (このような制御入力の集合を Γ とする)、制御開始から追従するまでの区間 $0 \leq t \leq T$ における追従特性については何も保証できない。そこで、制御入力の集合 Γ の中から「できるだけ速やかな追従」を実現するものを選ぶことにして、追従時間 T を最小にするもの、すなわち

$$J = \int_0^T 1 dt = T \rightarrow \min_{u \in \Gamma} \dots\dots\dots (10)$$

を達成する最適解を求めることが考えられる。この最適解を、評価関数 (10) に対する最適制御 (特に、最短時間制御) と呼ぶ。最適制御は、目標値 r_1 と制御対象のモデル (7) - (10) から計算される時間関数として与えられるので、図2のようなフィードフォワード制御 (開ループ制御) となる。

最適制御を算出するための代表的な方法は、ポントリヤーギンの最大原理と呼ばれる最適制御に対する必要条件に基づくものである。詳細は文献 (和書としては、文献1) が詳しい) を参照して頂くことにして、ここでは、最適制御 (最短時間制御) に対する最大原理を示すだけにしたい。

「最大原理」最適制御 $u(t)$ 、対応する最適軌道 $x(t)$ と最短時間 T に対し、行ベクトル関数 $p(t)$ 、非負スカラー λ およびスカラー μ (ただし $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$) が存在して、等式 (最大原理の不等式)

$$H(T, x(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u), 0 \leq t \leq T \dots (11)$$

および、つぎの等式が成立する。

$$H(T, x(T), u(T)) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $H(t, x, u) = \lambda \{1 + p(t) f(x, u)\}$ であり、 $p(t)$ はつぎの関係を満たす。

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H(t, x(t), u(t))}{\partial x} \dots\dots\dots (13)$$

$$p(T) = \mu \frac{\partial g(x(T))}{\partial x} \dots\dots\dots (14)$$

最大原理の必要条件を方程式とみて、これらを満たす解 $x(t)$ 、 $p(t)$ 、 λ 、 μ 、 $u(t)$ 、 T を求めれば、その解は最適解の候補 (極解) となる。実際に最適解となることを確認するためには、別に十分条件を準備するか、極解が唯一つしか

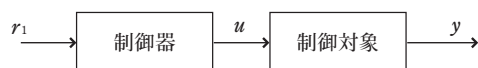


図2 最適制御 (フィードフォワード制御)

いことを示す必要がある。最大原理を用いて最適制御を求める際の最大の問題は、極解を算出するために、システム方程式 (7) と随伴方程式 (13) (および境界条件 (8) と (14)) から構成される2点境界値問題を解かなければならないことである。

追従特性の評価関数は (10) のような追従を達成するまでの時間だけではない。評価関数として、例えば、追従を達成するまでの制御量 y と目標値 r_1 の偏差の2乗を指定した時間 T まで積分した値とすると、つぎのような最適制御問題となる。

$$J = \int_0^T (r_1 - y)^2 dt \rightarrow \min_{u \in \Gamma} \dots\dots\dots (15)$$

なお、上記の「最大原理」の条件において、 $H(t, x, u) = \lambda (r_1 - g(x))^2 + p(t) f(x, u)$ と置き換えて、条件 (12) を削除すれば、この場合の最大原理の条件となる。

最適制御は制御対象の完全なモデルが与えられることを前提とした制御であり、制御対象に外乱が加わった場合や制御対象が変動してモデルとの不一致が生じた場合には、その制御性能を保証することができなくなってしまうことに注意しなければならない。もう一つ注意すべき点は、最適制御は時刻 T で目標値 r_1 を達成するが、 T 以降における制御量の振舞いについては何も保証していないことである。目標値 r_1 を維持するためには、時刻 T 以降では再びフィードバック制御 (例えば、PID 制御) を用いることが考えられる。

4 ゲインスケジューリング

2章の最後に、目標値 r_0 に対して調整されたPID制御器 (6) (パラメータ $K(r_0)$) によるフィードバック制御において、目標値を r_0 から大きく離れた r_1 に変更した場合、一般には良い目標追従特性は期待できないことを述べた。その理由は、このPID制御器は目標値 r_0 の近傍でのみ有効に働くことしか保証できないからである。この問題に対する一つの改善策は、目標値 r_1 に対してもPID制御器 (パラメータ $K(r_1)$) を用意しておき、目標値 r_1 を目指して移動する動作点を監視して、適当な時点でPID制御器のパラメータを $K(r_0)$ から $K(r_1)$ へ切り換えることである。切り換えを滑らかにするための一つの方法は、スケジューリングパラメータ α を導入してPID制御器のパラメータを

$$K_\alpha = (1 - \alpha) K(r_0) + \alpha K(r_1) \dots\dots\dots (16)$$

とし、動作点の移動に合わせて、 α を0から1へ増加させることである。さらに、必要であれば、 r_0 と r_1 の間に仮の目標値をいくつか設定して対応するPID制御器のパラメータを用意し、これを動作点の移動に合わせて切り換えて用いることになる。これがゲインスケジューリングの基本的なアイデア

アイデアであり、図3のような構成になる。

ゲインスケジューリングの問題点は、その制御性能に関して理論的な保証がないことである。また、動作点の移動に合わせた切り換えのタイミングやスケジューリングに関する明快な指針がないということも問題である。近年、これらの欠点に対処するために新しいゲインスケジューリングが提案されている。この新しいゲインスケジューリングのアイデアは、最初にシステムパラメータが動作点の移動に対応して変化する線形化モデル (LPVシステム) を構築し、この線形化モデルに対する制御器を設計することにより、自動的に動作点の移動に伴って切り換わる (スケジュール化された) 制御器を導くというものである。概要を以下に述べる。

まず、LPVシステムを構築する一つの方法を紹介する。目標値 r_0 から r_1 までの間にいくつかの目標値 $\bar{r}_k$, $k=1, \dots, n$ ($r_0 = \bar{r}_1 \leq \bar{r}_2 \leq \dots \leq \bar{r}_n = r_1$) を選び、それぞれについて平衡状態を実現する動作点を求めて、(4) 式の導出に用いた同じ手順を繰り返すことにより線形化モデルを導く。この結果を、(4) 式の記法に合わせて、

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= A(\bar{r}_k) \delta x + b(\bar{r}_k) \delta u \dots\dots\dots (17) \\ \delta y &= c(\bar{r}_k) \delta x \end{aligned}$$

と表す。動作点を求めるためには方程式 (2) を解く必要があるが、実際には、適当な制御器を用いて構成したフィードバック制御システム (実機あるいは非線形モデル) において、目標値を r_0 から r_1 まで十分ゆっくりと動かしながら、出力 y が選んだ目標値の値になったときの状態値 x と入力値 u を読み取ればよい。このようにして得られた線形化モデル (17) のパラメータ $A(\bar{r}_k)$, $b(\bar{r}_k)$, $c(\bar{r}_k)$, $k=1, \dots, n$ の各要素を、出力値 y を横軸にとってプロットして適当な関数で内挿することにより、出力 y と共に変化するパラメータ $\hat{A}(y)$, $\hat{b}(y)$, $\hat{c}(y)$, $r_0 \leq y \leq r_1$ が得られる。その結果、

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \hat{A}(y) \delta x + \hat{b}(y) \delta u \dots\dots\dots (18) \\ \delta y &= \hat{c}(y) \delta x \end{aligned}$$

というLPVシステムモデルが導かれる。

つぎのステップは、LPVシステム (18) に対する制御器の構成である。LPVシステムに対する制御器の一般的な形式は、やはりLPVシステムであり

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c(y)x_c + b_c(y)\delta y, x_c(0) = 0 \dots\dots\dots (19) \\ \delta u &= c_c(y)x_c \end{aligned}$$

で与えられる (図3)。LPVシステム (18) および (19) はパラメータ y を固定すると線形システムであるから、線形制御理論を用いた制御器の設計が可能である。例えば、LQ制御や H^∞ 制御であれば、制御器の構成条件は、パラメータ y (さらにパラメータの変化率 $\dot{y}$) に依存するRiccati行列不等式や線形行列不等式で与えられる。残された問題は、このようなパラメータ依存の条件式をいかに解くかという問題である。

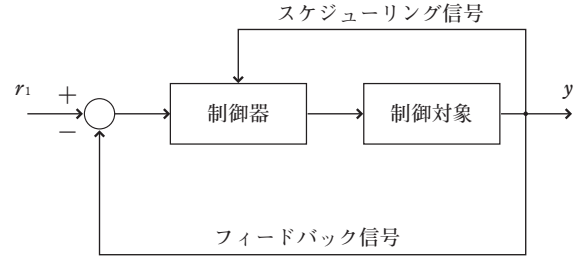


図3 ゲインスケジューリング (フィードバック制御+スケジューリング)

この問題を解決する最も単純な方法は、パラメータ領域の離散化である。離散化を用いない方法も提案されている (例えば文献2) 参照)。

5 おわりに

本稿では、最適制御とゲインスケジューリングの概要を紹介した。最適制御の最近の展開については触れることができなかった。非線形/線形システムのモデル予測制御としての新しい展開については文献3-5) を参照していただきたい。新しいゲインスケジューリングは、現在、実システムへの応用が盛んである。例えば、ジェットエンジンの推力制御⁶⁾ や射出成形機の世界速度制御や推力制御⁷⁾ への応用が報告されている。これらの文献は新しいゲインスケジューリングの具体的な手順を知る上でも便利である。

参考文献

- 1) 加藤寛一郎：工学的最適制御 非線形へのアプローチ，東京大学出版会，(1993)
- 2) 内田健康，渡辺 亮：ゲインスケジューリングー適応/非線形制御への展開，システム/制御/情報，42 (1998)，306.
- 3) 大塚敏之：非線形Receding Horizon制御の計算法について，計測と制御，41 (2002)，366.
- 4) 大嶋正裕，関 宏也：モデル予測制御Vー非線形モデル予測制御，システム/制御/情報，47 (2003)，52.
- 5) 藤田政之，大嶋正裕：モデル予測制御VIーハイブリッドモデル予測制御，システム/制御/情報，47 (2003)，146.
- 6) 渡辺 亮，内田健康：実用化が見えてきたゲインスケジューリング，計測と制御，38 (1999)，31.
- 7) 杉山高洋，内田健康：電気油圧サーボ系における速度および推力のゲインスケジューリング制御，電気学会論文誌D，122-D，(2002)，1051.

(2003年3月17日受付)