

入門講座

計測・制御技術入門 制御技術-4

H^∞ 制御、モデリング

H^∞ Control, Modeling

木村英紀

Hidenori Kimura

東京大学 新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻 教授

1. H^∞ 制御

① はじめに

1960年前後に生まれた「現代制御理論」は制御が体系的な理論にもとづく科学であることを明らかにしたが、現実の制御の実務は泥臭い試行錯誤と経験と勘の世界であり、「科学」から程遠いものであった。このような「理論と実務のギャップ」は制御に特有のものではない。むしろどのような学問領域でも多かれ少なかれ存在する。ギャップが存在することが学問の進歩にとって必要である、という逆説的な表現もあながち誤りではない。ただ、ギャップの存在を認めるだけでは何も生まれない。理論が現実の問題点とどのように切り結び、それを理論を深めることによって解決できたかどうか、ということが理論の試金石となる。ギャップを通してどれだけの火花が散り、その結果ギャップの新しい姿がどう見えてくるかが問題である。

H^∞ 制御は、制御系設計の実務家の問題意識が制御理論の研究者の問題意識とまともにかみ合って生まれたおそらく最初の成果であろう。両者に共通する問題意識は次の通りである。

- (1) 制御系のロバスト性をどう保証するか？
- (2) 周波数領域における古典的な制御系設計を理論的に体系化出来るか？
- (3) 外乱除去をどのように保証するか？

これらの問題が重要であることは折に触れ話題になっていたが、理論の問題としてよりはむしろ個々のケースで実務的に処理すべき問題と考えられていた。理論が解決すべき具体的な問題として正面切って定式化されたのは H^∞ 制御である。 H^∞ 制御はこれらの問題に真正面から理論として解答を与えたのである。

「理論と実際のギャップ」は「現実とは理論通りに行かない」

という暗黙の了解のもとに、理論を割り引きしてケースバイケースの「知恵」で乗り切るのが普通の対処法である。 H^∞ 制御はこのやり方に任せなかった。このギャップを理論をさらに深めることによって解決したのである。これが H^∞ 制御が大きなインパクトを与えた理由である。

以下では H^∞ 制御の概略を述べる。

② H^∞ 制御の定式化

H^∞ 制御では制御対象を図1のように表現する。

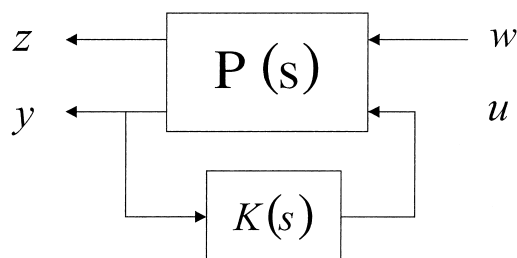


図1 H^∞ 制御

入力は操作できるもの、すなわち操作入力 u と、操作出来ないもの、すなわち外部入力 w に分ける。出力は観測出来るもの、すなわち観測出力 y と、制御すべきもの、すなわち制御出力 z からなる。 z は小さいことが望ましいような量（トラッキング誤差、操作パワーなど）を選ぶ。観測出力 y にもとづいて操作入力 u を決定するのが制御器 K の役割である。これより図1の「閉ループ系」は、制御対象のモデル

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

と、制御器のモデル

$$u = K(s)y \dots\dots\dots (2)$$

から決まる。上の2つの式から u と y を消去すると

$$\begin{aligned} z &= \Phi(s)w \\ \Phi(s) &= P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

を得る。 H^∞ 制御の目的は、まず図1の閉ループ系が安定であること、制御出力 z の「大きさ」をなるべく小さく抑ええることである。 z の大きさをあらわすものとして使われるのが次式で定義される L_2 -ノルムである。

$$\|z\|_2 = \left(\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \dots\dots\dots (4)$$

ここで $\|z(t)\|$ は時刻 t における $z(t)$ のユークリッドノルム $\|z(t)\| = (z_1(t)^2 + z_2(t)^2 + \dots + z_m(t)^2)^{1/2}$ であり、 $\|z\|_2$ はノルムの2乗を0から ∞ にわたって積分したものの平方根である。同じ閉ループ系でも w が大きければ $\|z\|_2$ は大きくなるので(4)式自体を制御性能の指標とするのは意味がない。 w の大きさ、すなわち $\|w\|_2$ でスケリングをした $\|z\|_2$ を性能指標とすべきである。そのためには $\|z\|_2/\|w\|_2$ の大きさを性能指標とすればよい。 $\|z\|_2/\|w\|_2$ は外部入力 w が変われば変わる。そのうちで最大のもの、すなわち $\max_w (\|z\|_2/\|w\|_2)$ を制御性能の指標にとるとこれは式(3)より K に依存する。すなわち性能指標は

$$J(K) = \max_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \max_w \frac{\|\Phi w\|_2}{\|w\|_2} \dots\dots\dots (5)$$

となる。数学的にはこれが次式で与えられる $\Phi(s)$ の H^∞ ノルムと一致するのである。

$$J(K) = \|\Phi\|_\infty := \sup_\omega \sqrt{\bar{\lambda}(\Phi^T(-j\omega)\Phi(j\omega))}$$

ここで $\bar{\lambda}$ は最大固有値をあらわす。すなわち(5)式であらわされる性能指標は閉ループ伝達関数 $\Phi(s)$ の虚軸上における特異値の最大値、すなわち H^∞ ノルムと一致する。これがこの制御方式が H^∞ 制御とよばれる由縁である。1入力1出力の場合は特異値は絶対値と等しい。すなわち

$$J(K) = \sup_\omega |\Phi(j\omega)|$$

である。言い換えると閉ループ周波数応答のピーク値の大きさ(共振周波数の振巾)が性能指標である。

H^∞ 制御問題：与えられた P と正数 γ に対し次の条件を満足する K が存在するかどうかを判定し、存在する場合はそれをもとめる方法を与える。

- (1) 図1の閉ループ系が安定 (2) $\|\Phi\|_\infty < \gamma$ (6)

3 H^∞ 制御が解く設計問題

H^∞ 制御の範疇に属する制御問題を幾つか述べよう。

(1) ロバスト安定化問題

図2の閉ループ系を考える。ここで Δ は不確かな要素で、

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1$$

であること、すなわち周波数ゲインのピーク値が1以下であることだけが分かっている安定な要素とする。 $W(s)$ は不確かさの周波数依存をあらわす重み係数である。

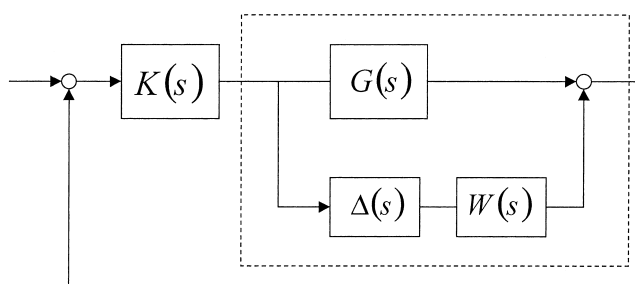


図2 不確かなシステムの制御

ロバスト制御の理論より、この制御系が任意の $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ を満足する $\Delta(s)$ に対して安定であるための十分条件は

$$\|WK(I + GK)^{-1}\|_\infty < 1 \dots\dots\dots (7)$$

であることが知られている。(3)式で $P_{11}=0$, $P_{12}=W$, $P_{21}=I$, $P_{22}=-G$ とした場合に $\Phi = WK(I + GK)^{-1}$ となるから、制御対象を

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W \\ I & -G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

とし、 $\gamma=1$ を選んで H^∞ 制御問題を解けばよい。

(2) 外乱除去

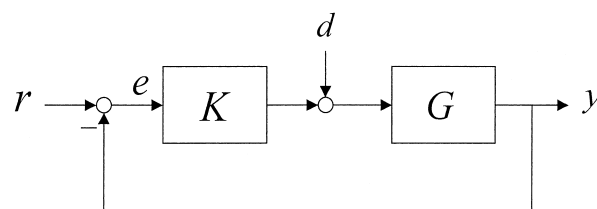


図3 外乱除去問題

上図のような外乱の存在する系のトラッキング問題を考える。

d は外乱で r は基準入力である。トラッキング誤差は

$$e = (I + GK)^{-1}(r + Gd)$$

となる。基準入力と外乱の周波数依存重みをそれぞれ W_1 , W_2 とすると、制御問題は

$$J(K) = \left\| \left[(I + GK)^{-1} W_1 \quad (I + GK)^{-1} G W_2 \right]_{\infty} \right\| \cdots \cdots (9)$$

を小さくする問題となる。この問題は

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} W_1 & G W_2 & I \\ \hline W_1 & G W_2 & -G \end{array} \right] \cdots \cdots (10)$$

とおくことにより、やはり H^{∞} 制御の問題に帰着される。

(3) 混合感度問題

感度 $(I + GK)^{-1}$ と相補感度 $(I + GK)^{-1} GK$ にそれぞれ重みをつけて評価関数とする制御問題は**混合感度問題**とよばれる。感度を小さくすることによって (2) でも見たように外乱の誤差への影響を小さくすることが出来、パラメータ変動の出力へ与える影響を小さくすることも出来る。一方、相補感度を小さくすることによって G の不確かさやパラメータ変動に対して安定余有を大きくすることが出来る。ところが両者は

$$(I + GK)^{-1} + (I + GK)^{-1} GK = I$$

を満足するから、どちらも小さくすることは出来ない。従って周波数重みを用いた trade-off を行う必要がある。すなわち適当な重み W_1 , W_2 に対して

$$J(K) = \left\| \left[(I + GK)^{-1} W_1 \quad (I + GK)^{-1} G W_2 \right]_{\infty} \right\| \cdots \cdots (11)$$

を評価関数にとる。上式と (9) 式の違いは第2項に K があるかないかである。(11) 式は

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} W_1 & 0 & G \\ \hline W_1 & W_2 & -G \end{array} \right] \cdots \cdots (12)$$

に対して H^{∞} 制御を考えればよい。

④ 状態空間における H^{∞} 制御の解法

H^{∞} 制御をもとめる計算アルゴリズムはすでに10年以上前から確立され、それをもとにしたソフトウェアパッケージも広く用いられている。その代表的なものが MATLAB である。MATLAB を使うためには (1) 式の制御対象を記述する状態空間モデルが必要である。それは次のように記述される。

$$dx/dt = Ax + B_1 w + B_2 u \cdots \cdots (13a)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \cdots \cdots (13b)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w \cdots \cdots (13c)$$

ここで x は状態ベクトル、 w , u , z , y はすでに (1) 式で述

べた2種類の入力と2種類の出力である。すなわち w は r 次元外部入力、 u は p 次元操作入力、 z は m 次元制御誤差出力、 y は q 次元観測出力である。通常 H^{∞} 制御は

$$m \geq p, \quad r \geq q \cdots \cdots (14)$$

を仮定している。すなわち制御出来ない外部入力は制御出来る操作入力より多く、制御したい誤差出力は観測出来る出力より多いことである。

また次のような条件をつける。

$$\text{rank } D_{12} = p, \quad \text{rank } D_{21} = q,$$

つまり D_{12} の列は1次独立、 D_{21} の行は1次独立という仮定である。これは一般性を失わない。重要な仮定は次の2つの伝達関数行列

$$G_{12}(s) = C_1 (sI - A)^{-1} B_2 + D_{12} \cdots \cdots (15)$$

$$G_{12}(s) = C_2 (sI - A)^{-1} B_1 + D_{21} \cdots \cdots (16)$$

が虚軸上に零点をもたないことである。この条件のもとで (6) 式を満足する制御器 $K(s)$ が存在するための必要十分条件は次の5つの条件が満足されることである。

$$(1) \quad \gamma^2 I - D_{11}^T (I - D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T)^{-1} D_{11} > 0$$

$$(2) \quad \gamma^2 I - D_{11} (I - D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} D_{21}^T)^{-1} D_{11} > 0$$

(3) リッカチ方程式

$$XA + A^T X - (C_z^T D_z + XB) (D_z^T J_{\gamma} D_z)^{-1} (D_z^T C_z + B^T X) + C_z^T C_z = 0$$

が正定解 X をもち、行列

$$A_F = A + BF, \quad F = -(D_z^T J_{\gamma} D_z)^{-1} (D_z^T C_z + B^T X)$$

が安定である。

(4) リッカチ方程式

$$YA^T + AY - (B_w D_w^T + Y C^T) (D_w J_{\gamma} D_w^T)^{-1} (D_w B_w^T + C Y) + B_w B_w^T = 0$$

が正定解 Y をもち、行列

$$A_L = A + LC, \quad L = -(B_w D_w^T + Y C^T) (D_w J_{\gamma} D_w^T)^{-1}$$

が安定である。

(5) 積 XY の最大固有値が γ^2 より小さい。

ただし

$$C_z = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = [B_1 \quad 0]$$

$$D_z = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} D_{11} & I \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\gamma} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

である。

このように H^{∞} 制御の基本的なアルゴリズムは2本のリッカ

チ方程式を解くことに帰着される。従ってアルゴリズムの「複雑度」という点ではカルマンフィルタを併合した最適レギュレータと基本的には同等である。

上記 (1) ~ (5) の条件を満足するとき、仕様を満足する制御器のなかで「中心解」とよばれるものが次式で与えられる。

$$dx_K/dt = (A + BF)x_K - UL_y(y - (C_2 + D_{21}F_w)x_K)$$

$$u = F_u x_K$$

ただし

$$U = (1 - \gamma^{-2}XY)^{-1}, \quad F = \begin{bmatrix} F_w \\ F_u \end{bmatrix}$$

$$L = [L_x \quad L_y]$$

である。

H[∞]制御についてはすでに多くの参考書が出ているので参照されたい。

- [1] 美多勉：H[∞]制御，昭晃堂，(1994)
- [2] 早勢實：H[∞]制御入門，オーム社，(1996)
- [3] 細江繁幸，荒木光彦：制御系設計，H[∞]制御と応用，朝倉書店，(1994)
- [4] 市川邦彦：H-infinity制御理論，科学出版社，(1998)
- [5] 木村英紀：H[∞]制御，コロナ社，(2000)

II. モデリング

① はじめに

モデリングは言うまでもなく制御系設計の前提条件である制御対象のモデルを構築する作業である。制御系の設計はひとたびモデルが与えられればあとはソフトウェアを用いて体系的な手順に従って行うことが出来るが、モデリングはあらゆる対象に適用出来る普遍的で体系的な手法は存在しないと行ってよい。モデリングには依然として対象の個別性、特殊性に根ざしたアドホックな手法が鍵を握る対症療法的な側面が色濃く残っている。

しかしそれでもモデリングの一般的手法は存在する。それは「状態空間モデル」とよばれる普遍的なモデルの形式が存在するからである。一般の制御対象の状態空間モデルは

$$dx/dt = f(x, u, w), \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = g(x, u, w) \dots\dots\dots (17)$$

と書かれ、その線形バージョンが (13) 式で表される。状態空間モデル (17)、あるいはその線形バージョン (13) は広範な対象を表現する能力、すなわち＜普遍性＞をもっているだ

けでなく、それをもとに様々な解析手法が存在するという点で＜論理性＞も併せ持っている。制御理論の力はこの状態空間モデルの存在にその源泉がある、と言っても過言ではない。制御のためのモデリングはその意味では状態空間モデル (13) (17)、あるいはその等価物である伝達関数を制御対象の性質をうまく反映するように構築することに帰着されると言っても間違いではない。

モデリングの古典的な形態はステップ応答や周波数応答、スペクトル解析法などの非パラメトリックな方法であった。これらの方法はそれなりに制御対象の特性に関する確実な情報をもたらしたが、状態空間モデルと直接結びつかない点、オンラインの計算が困難な点などがマイナスとなり、次第にパラメトリックな方法 (モデルに含まれる未知パラメータを推定する方法) に道を譲りつつある。パラメトリックなモデルを入出力データから推定する方法は統計学における時系列データ処理の一種である。システム同定は時系列データ解析のもっとも先端的なテーマとして発展し続けており、最近では「学習の理論」として定着しつつある。以下ではパラメトリックな方法について基本的な流れを述べる。

② 予測誤差最小化法

図4の対象に関する入出力データを

$$U = \{ \dots u(0), u(1), u(2), \dots \}$$

$$Y = \{ \dots y(0), y(1), y(2), \dots \}$$

とする。 $u(i)$ 、 $y(i)$ はそれぞれ時刻における入力、出力の観測値である。システムは未知のパラメータ θ (ベクトル) をもつとする。

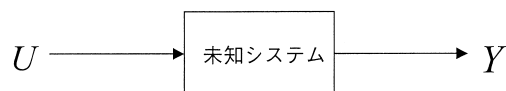


図4 ブラックボックス

時点 i における未知パラメータ θ の値をどう決めるかによって時点 i における出力の予測値 $\hat{y}(i|\theta)$ と実際の出力 $y(i)$ との差、すなわち予測誤差

$$\varepsilon(i|\theta) = y(i) - \hat{y}(i|\theta)$$

が決まる。推定誤差 $\varepsilon(i|\theta)$ の2乗の累積

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i|\theta)^2 \dots\dots\dots (18)$$

が最小になるように θ を決めるのが予測誤差最小化法である。

もし $\hat{y}(i|\theta)$ が未知パラメータ θ に関して線形であれば、

予測誤差を最小にする θ の推定値は解析的にもとめることが出来る。たとえばARXモデルとよばれる

$$\hat{y}(i|\theta) = -a_1y(i-1) - \dots - a_ny(i-n) + b_1u(i-1) + \dots + b_mu(i-m) \dots \dots (19)$$

はその例である。この場合未知パラメータはベクトル

$$\theta = [-a_1 - a_2 \dots - a_n \ b_1 \ b_2 \dots b_m]$$

である。(18) 式の $V_N(\theta)$ を最小にする θ を $\hat{\theta}_N$ とすると、 $\hat{\theta}_N$ はデータ入手に関して逐次化することが出来る。すなわち $\hat{\theta}_{N+1} = f(\hat{\theta}_N, y_{N+1}, u_{N+1})$ という形に表現することが出来る。

(19) 式におけるパラメータ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ がもとめれば、そこから状態空間モデル

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i \dots \dots \dots (20a)$$

$$y_i = cx_i \dots \dots \dots (20b)$$

をもとめることが出来る。ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad \dots \quad b_m \quad \dots \quad b_1]$$

で、 $m \leq n$ と仮定した。モデル (20) は離散時間モデルであり、(13) 式のような連続時間モデルではない。従って連続時間ベースの設計理論を使うには (20) 式のモデルを「連続化」することが必要になる。データのサンプリング間隔が短い場合は (20) を

$$x_{i+1} - x_i = (A - I)x_i + bu_i$$

とおき、両辺をサンプル間隔 δt で割って左辺を dx/dt と近似すればよいが、サンプリング間隔が短くない場合は連続時間のモデルを得るのはそう簡単ではない。何故なら (20) 式と整合する連続時間モデルは一意ではないからである。

予測誤差最小化法については文献1) に詳しい。

③ 部分空間法

部分空間法は状態空間モデルを直接もとめるための方法でここ10年来発展してきた比較的新しい方法である。この方法は入出力データに対する「ハンケル行列」とよばれるフォーマットを用いる。入力に対するハンケル行列は次のように与えられる。

$$H_U = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+N-1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \dots & u_{k+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k+i-1} & u_{k+i} & \dots & u_{k+N+i-2} \end{bmatrix}$$

出力に対するハンケル行列 H_Y も同様にもとめられる。部分空間法のアルゴリズムはハンケル行列の複合である行列

$$V = \begin{bmatrix} V_U \\ H_Y \end{bmatrix}$$

に対するQR分解とよばれる処理を出発点とする。一連の安定な数値計算の手続きによって (20) 式の状態空間モデルが得られる。詳細はスペースの制約から省略するが、この方法の利点は多入力多出力系に対する適用が容易であること、安定で精度のよいアルゴリズムが完備していること、次数の決定が合理的であることがあげられる。このアルゴリズムについてもMATLABにツールボックスが完備されており、初心者も十分使いこなすことが出来る。詳しくは文献2) を参照されたい。

なおこの方法の難点はモデリングがオフラインでしか行えないことにあったが、最近筆者らによりオンライン化が可能となった³⁾。

④ 非線形システムのモデリングの新しい流れ

非線形システムの同定は線形に比べて多くの困難がある。しかしパラメトリックなモデルを仮定すれば、あとはパラメータ推定の問題となり、線形と比べてパラメータを最適化するアルゴリズムはそれ程複雑ではないが、その最大のポイントは (17) 式における未知の非線形関数 $f(x, u, w)$ 、 $g(x, u, w)$ をどのようにパラメトライズするかである。 f や g の形がある程度事前に分かっているならば、その知識を反映してパラメトライズ出来る。全く未知の場合はニューラルネットやラジアル基関数などを用いる。また遺伝的アルゴリズムなどさまざまな予測、学習の手法をパラメータ修正のために用いることが出来る。システム同定は単なる関数の学習ではなくダイナミックスの学習であるから、過去の入力や出力への依存性をもとめることが重要な問題となる。このような未来に影響を与える過去の入出力、すなわち情報ベクトルをどのように選び、それへの未知パラメータの依存性をどのように仮定するかが非線形システム同定の鍵になる。これについて前提となる知識がなければすべての組み合わせをとる以外にないが、その個数についての新しい知見がサポートベクトル機械とよばれる枠組で少しずつ明らかになりつつあるのは注目してよい。

なお最近「JUST IN TIME 法」とよばれるこれまでとは全く異なる新しいモデリングの方法が注目を集めている。この方法はモデリングを必要のあるたびに関連すると思われる過去の入出力の実績値のみを用いて行い、予測が済めばそれを

破棄してしまう。これによって関連が高いとは思われない遠いデータによる干渉が避けられ、予測しようとする数値に関連する情報のみを選び出すことによって精度も上がることが期待される。この方法はメモリーが安価となり、検索スピードも急速に上りつつある計算機工学の現状にマッチするものとして注目されている⁴⁾。

5 むすび

モデルを構築することはすべての仕事の出発点である。うまいモデルを作ることが出来れば仕事の成功は保証されたと言ってよい。モデルこそが実世界と理論の間をとりもつインターフェイスである。

モデルにも様々なレベルが存在するが、ここでは比較的物理現象に近いレベルのダイナミックな対象に関するモデリングの手法について述べた。進んでモデリングについて勉強したい読者は文献2, 5) を参照されたい。

なお鉄鋼関係のモデルについては文献6) が参考になる。

参考文献

- 1) L. Ljung : System Identification, Theory for the User, Prentice-Hall, 1987.
- 2) 足立修一 : MATLABによる制御のためのシステム同定, 東京電機大学出版局, 1996.
- 3) H. Oku & H. Kimura : A recursive 4SID algorithm using gradient type tracking, Automatica, 38 (2001) 6, 1035.
- 4) 鄭, 木村英紀 : Just In Time モデリングの新しい手法とその圧延セットアップモデルへの応用, 計測自動制御学会論文集, 37 (2001)
- 5) L. Ljung and T. Glad, Modeling of Dynamic Systems, Prentice-Hall, (1994)
- 6) 高橋亮一 : 鉄鋼業における制御, 産業制御シリーズ, コロナ社, (2002)

(2003年4月28日受付)