

入門講座

計測・制御技術入門 制御技術-5

非線形 H_∞ 制御とその応用

Nonlinear H_∞ Control Theory and its Application to Bilinear System

三平満司
Mitsuji Sampei

東京工業大学 大学院理工学研究科
機械制御システム専攻 教授

1 はじめに

線形 H_∞ 制御¹⁻⁴⁾はMATLAB、MaTX等の制御系設計のためのソフトウェア⁵⁻⁷⁾を用いることによって制御器を簡単に設計することができるため、様々な実システムに対して応用されている⁸⁾。一方、線形 H_∞ 制御理論を非線形システムに拡張した非線形 H_∞ 制御理論^{9,10)}は、理論的には成熟しているものの実応用例が少ない。

本解説では非線形 H_∞ 制御の実用化を目指して理論(状態フィードバック)の限界と可能性について解説するとともに双線形システムへの応用方法を述べる。

2 非線形 H_∞ 制御理論概説

非線形 H_∞ 制御理論の詳細に関しては井村氏の解説⁹⁾や van der Shaft の本¹⁰⁾にゆずり、ここでは理論の実用化可能性を探るのに必要な結果のみを示すことにする。

以下において記号は慣例に従い、 x は状態、 w は外部入力、 u は制御入力、 z は評価出力を表す n , m_1 , m_2 , p 次の縦ベクトルとする。また、 A , B , C , D 等は適当な次元の定数行列、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $j(x)$ は適当な次元の縦ベクトル値/行列値関数とする。

2.1 H_∞ ノルムと L_2 ゲイン

伝達関数 $G(s)$ で表される安定な線形システム

$$z = G(s)w \quad \dots\dots\dots (1)$$

の H_∞ ノルム(簡単のため1入出力系について記述)は周波数応答のゲインの最大値として

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w |G(j\omega)| \quad \dots\dots\dots (2)$$

と定義される。(直感的に理解するためには $\sup$ を $\max$ とお

きかえてもよい)。このように伝達関数の H_∞ ノルムは周波数応答で表されるため、線形 H_∞ 制御理論では周波数応答(感度関数、相補感度関数など)に基づいた制御系設計が可能となり、多くの実応用例が報告されるようになった⁸⁾。

一方、(外乱)入力 w と(評価)出力 z の大きさを表すノルムとしてつぎの L_2 ノルムを考えた場合

$$\|z\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |z(t)|^2 dt} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |w(t)|^2 dt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$G(s)$ の H_∞ ノルムは

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

であることが知られている。これは H_∞ ノルムが(外乱)入力 w によって生成される(評価)出力 z の大きさの比の最大値(ゲイン)を表していることを示している。このときの信号の大きさを測る尺度が L_2 ノルムであることから、伝達関数 $G(s)$ の H_∞ ノルムをシステムの L_2 ゲインと呼ぶことができる。

通常の H_∞ 制御理論ではこの H_∞ ノルムが最小(またはある値 γ 以下)になるように制御系を設計する問題を扱う。これは(外乱)入力 w によって生成される(評価)出力 z の大きさを最小化する問題と考えることができる。

さて、非線形システムには周波数応答の概念がないため、非線形 H_∞ 制御理論では H_∞ ノルムの概念としてこの L_2 ゲインを用いることになる。つまり、非線形システム S_0 に対して L_2 ゲインを

$$\|S_0\|_{L_2} = \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と定義し、非線形 H_∞ 制御理論ではこのゲインを γ 以下にす

ることを目的とする。

2.2 H_∞ 状態フィードバック制御問題

線形システム S_l

$$S_l \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

に対する線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題とは「与えられた正定数 γ に対して、閉ループシステムを内部安定にし、かつ w から z までの H_∞ ノルム (L_2 ゲイン) が γ 未満となる制御器 u を設計せよ」という問題である。定理を簡単にするために以下の直交条件

$$C_1^T D_{12} = 0, D_{12}^T D_{12} = I$$

を仮定すれば、この問題が可解であるための必要十分条件はつぎの定理で与えられる。

[定理] 線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題が可解であるための必要十分条件はつぎのリカッチ不等式

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P - PB_2 B_2^T P + C_1^T C_1 < 0 \dots\dots (8)$$

を満たす正定対称行列 P が存在することである。このとき制御器の一つは

$$u = -B_2^T P x \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。

これと同様に非線形システム S

$$S \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x) w + g_2(x) u \\ z = h_1(x) + j_{12}(x) u \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

に対する非線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題とは「与えられた正定数 γ に対して、閉ループシステムを内部 (指数) 安定にし、かつ w から z までの L_2 ゲインが γ 未満となる制御器 u を設計せよ。」という問題である。定理を簡単にするために以下の直交条件

$$h_1^T j_{12} = 0, j_{12}^T j_{12} = I$$

を仮定すれば、この問題が可解であるための必要十分条件はつぎの定理で与えられる。

[定理] 非線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題が可解であるための必要十分条件はつぎのハミルトンヤコビ偏微分不等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x^T} f + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_1 g_1^T \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x^T} g_2 g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} \\ & + h_1^T h_1 + \epsilon x^T x \leq 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

を満たす正定関数 $V(x)$ および正定数 ϵ が存在することである。このとき制御器の一つは

$$u = -\frac{1}{2} g_2^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x) \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。

ここで

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x^T} \right)^T \dots\dots\dots (14)$$

である。実際にはここで設計される状態フィードバックはハミルトンヤコビ偏微分不等式が満たされる範囲の状態 x で有効になる (準大域性)。また、直交条件が成り立たない場合にも同様にハミルトンヤコビ不等式を用いて状態フィードバックを設計できる。

3 非線形 H_∞ 制御の限界と可能性

前章で述べたように非線形 H_∞ 制御理論は線形 H_∞ 制御理論の自然な拡張として理論的にはほぼ解けているといっても過言ではない (出力フィードバック問題も既に解かれている)。この非線形 H_∞ 制御理論を実システムに応用するためには非線形 H_∞ 制御の特徴 (限界と可能性) を十分理解する必要があるだろう。著者の考える理論の限界と可能性 (得意とする分野) を以下に列挙し、実応用への注意点をまとめる。

[理論の限界]

(1) 原点近傍では非線形 H_∞ 制御と線形 H_∞ 制御は同じ。

非線形のハミルトンヤコビ不等式を2次近似するとそれは線形のリカッチ不等式に帰着されることを示すことが容易にできる。これは原点近傍では「非線形 H_∞ 制御の線形近似」と「線形近似したシステムに対する線形 H_∞ 制御」が一致することを示している。つまり、非線形性が弱いシステムの場合では非線形システムを線形化したシステムに対する線形 H_∞ 制御で十分 (非線形 H_∞ 制御は不要) である。しかし、後で述べるように原点近傍外でのシステム応答の改善の可能性が残っていることに注意する。

[非線形 H_∞ 制御理論の得意とする問題]

(2) (準) 大域的安定性の保証。

(3) 原点近傍外での応答の向上。

ハミルトンヤコビ偏微分不等式の解を求めることはリアプノフ関数を直接求めることに対応するので、システムの (準) 大域安定性が確保され (特に状態フィードバックの場合)、非線形システムの安定化領域を広げられる。

著者らは (3) の原点近傍外での応答の改善が非線形 H_∞ 制

御の実応用に関する一番のメリットと考えている。先に述べたように非線形 H^∞ 制御を行った場合、原点近傍では線形 H^∞ 制御よりも性能を向上させることはできない。しかし、原点より離れたところでは制御性能を改善できる可能性がある。

さて、これら非線形 H^∞ 制御理論の限界と可能性以外に、実応用に関しては以下の点も認識しておく必要がある。

[実用化への課題]

(4) 有用な評価出力の選び方の議論が十分ではない。

(5) ハミルトンヤコビ偏微分不等式が容易に解けない。

線形 H^∞ 制御理論が産業界にも受け入れられた背景には有用な評価関数が周波数応答を基に示されたことが大きいと考えられる(感度関数、相補感度関数等)。しかし、非線形 H^∞ 制御では周波数応答の概念が使えないため、これらとは異なる評価関数を導入する必要がある。これに関しては個々の問題に対する評価出力の選び方のケーススタディーを繰り返す以外にないを考える。次章で述べる双線形システムに対する制御は著者の一つの回答である。

また、ハミルトンヤコビ偏微分不等式は非線形偏微分不等式であるため、解析的に解くことはほぼ不可能である。(5)への対応としてはハミルトンヤコビ偏微分方程式の数値解法を精力的に研究する方法と、問題をハミルトンヤコビ偏微分不等式を解かずに(例えば代数リカッチ不等式を解くだけで)すまず方法が考えられる。数値的にハミルトンヤコビ偏微分不等式(方程式)を解く方法はいくつか提案されているが、現時点ではすべての場合において有効な方法はない。それに対して次節の双線形システムへの応用は問題を工夫することにより偏微分方程式を回避する方法である。

4 双線形システムに対する制御器の設計

この章では先に述べた非線形 H^∞ 制御の限界と可能性を考慮に入れた一つの設計手法として、著者らの提案している双線形システムに対する非線形 H^∞ 制御器の設計法¹¹⁾について述べる。

4.1 双線形システム

ここで考える双線形システムとは制御入力 u が状態 x との掛け算で状態の変化 $\dot{x}$ に作用するシステムで、状態空間表現が³⁾

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^m B_{2i} x u_i \\ &= Ax + B_1 w + B(x) u \dots\dots\dots (15)\end{aligned}$$

で与えられるシステムである。明らかにシステム(15)は原点 $x=0$ で $B(0)=0$ となり、不可制御となる。そのため(直交条件を満たす)線形な評価出力

$$z = C_1 x + D_{12} u \dots\dots\dots (16)$$

を用いると原点近傍では

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + O^2(x, u) \\ z &= C_1 x + D_{12} u \dots\dots\dots (17)\end{aligned}$$

と線形近似されるため、 $u=0$ が w から z のノルムの意味では最適な制御となってしまう(入力 u は x の挙動にほとんど作用しないので、評価出力 z を大きくしない $u=0$ が最適となる)。さらに $u=0$ なる制御器を用いると大域的に(原点近傍外においても)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w \\ z &= C_1 x \dots\dots\dots (18)\end{aligned}$$

となり、大域的にシステムの L_2 ゲインは原点近傍の L_2 ゲインと一致する。つまり、 $u=0$ が大域的に L_2 ゲインを最小にしまい、このままでは有効な制御系の設計ができないシステムである。

4.2 非線形重みの導入による原点近傍外での応答改善

双線形システムに対して線形の評価出力を用いて有効な制御系が設計できないのは双線形システムが原点近傍では(ほとんど)不可制御なシステムであるからである。そのため、原点近傍では L_2 ゲインを下げることはできない。しかし、双線形システムでは原点近傍外ではシステムの可制御性が回復し、制御が有効になるはずである、しかし、線形な評価出力を考える限り、 L_2 ゲインは原点近傍での値で決まってしまうため、原点近傍外での応答の改善が不可能となってしまう。

そこで、評価出力として図1のブロック線図のように非線形重み $a_1(x)$, $a_2(x)$ を導入することを考える。ここで簡単のために周波数重みの $W_2(s)$ を $W_2(s)=1$ とすると、システムの一般化プラントは次式で表される。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2(x) u \\ z = a_1(x) C_1 x + a_2(x) D_{12} u \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

ここで $a_i(x)$ は非線形重み関数で、

$$\begin{aligned}a_1(x) &\approx 1 \text{ (原点近傍)} \\ a_1(x) &\gg 1 \text{ (原点近傍外)} \dots\dots\dots (20)\end{aligned}$$

と選べば原点近傍外では $a_1 \equiv 1$ の場合に比べて状態 x の大きさをより抑えた制御をしなければ評価出力 z が小さくならな

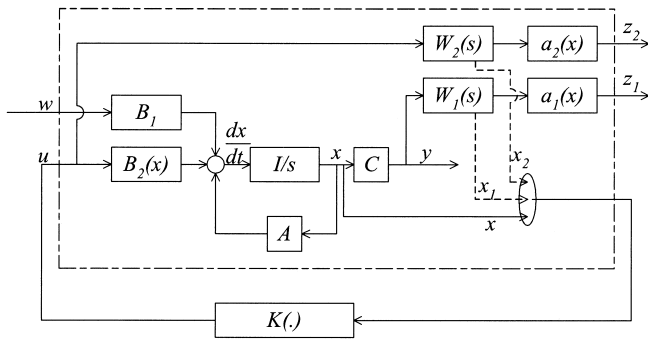


図1 非線形重みを用いた一般化プラント

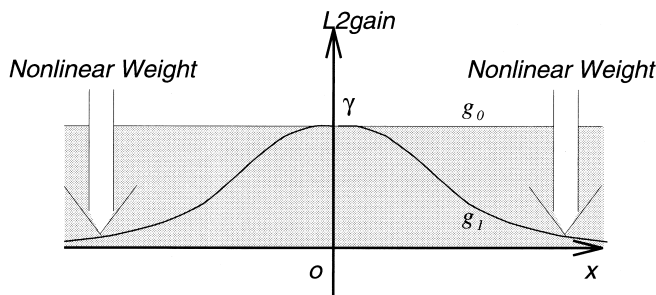


図2 非線形重みとL2ゲイン

い。つまり、原点近傍外で状態 x の大きさをより抑制する制御が可能となる。この非線形重みは直感的には図2に示すように原点近傍外で L_2 ゲインを積極的に下げる評価に相当する。

このように非線形重みを導入することにより、原点近傍で応答を改善できないシステムでも、原点近傍外での応答を改善する事が可能となる。

4.3 ハミルトンヤコビ偏微分不等式の簡易解法

さて、式(19)の一般化プラントに対して非線形 H_∞ 制御を適用するとハミルトンヤコビ偏微分不等式を解く必要が生ずる。しかし、このような簡単に見える双線形システムにおいてもハミルトンヤコビ偏微分方程式を解くことは容易ではない。一方、我々が必要とする非線形重み $a_i(x)$ は関数が決まっている必要はなく、原点近傍で $a_i(x) \approx 1$ 、原点近傍外で $a_i(x) \gg 1$ であるだけでよい。そこで、このような非線形重みのうち、ハミルトンヤコビ偏微分不等式が解きやすいものを選ぶことにしよう。

式の展開を簡単にするために

$$C_1^T D_{12} = 0, D_{12}^T D_{12} = I$$

を仮定する。一般化プラント(19)を線形近似し、線形 H_∞ 制御を用いるとリカッチ不等式は

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_1^T C_1 < 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

となることが容易に確かめられる。この $P > 0$ を用いてハミルトンヤコビ偏微分不等式の解を $V(x) = x^T P x$ と仮定し、この $V(x)$ がハミルトンヤコビ偏微分不等式の解である範囲で非線形重みを調整することにする。この $V(x)$ を(19)に対するハミルトンヤコビ偏微分不等式に代入して整理することにより以下を証明することができる($a_2(x)$ を導入することにより、直交条件は満たされなくなるが、定理2と同様なハミルトンヤコビ偏微分不等式が導出される)。

[定理] 正定数 γ が与えられているとする。プラント(19)に対してリカッチ不等式(21)を満たす正定対称行列 P が存在し、さらに非線形重み $a_1(x)$ 、 $a_2(x)$ が条件

$$\frac{1}{a_2^2(x)} x^T P B_2(x) B_2^T(x) P x + (1 - a_1^2(x)) x^T C_1^T C_1 x \geq 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

を満たすならば状態フィードバック

$$u = -\frac{1}{a_2(x)} B_2^T(x) P x \quad \dots\dots\dots (23)$$

により閉ループ系の L_2 ゲインは γ 以下となる。

制御目的として

- ・ 原点近傍外で状態 x の大きさを抑制する
- ・ 入力はできるだけ制限する

ことを考えれば、この拘束を満たす非線形重みのうち、

- ・ $a_1(x)$ は原点近傍外で大きくなる
- ・ $a_2(x)$ は入力を制限するためにできる限り大きくする

となるものを探せばよい。このような非線形重みとして以下がある。

[定理] 非線形重み $a_1(x)$ 、 $a_2(x)$ が

$$a_1(x) = \sqrt{1 + m_0(x) x^T P B_2(x) B_2^T(x) P x} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + m_0(x) x^T C_1^T C_1 x}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

であるならば条件(22)を満たす。ただし、 P はリカッチ不等式(21)の正定対称解である。また $m_0(x)$ は任意の正定スカラー値関数である。このとき非線形な特性をもつ H_∞ 状態フィードバック制御器 u は次式で与えられる。

$$u = -(1 + m_0(x) x^T C_1^T C_1 x) B_2^T(x) P x \quad \dots\dots\dots (26)$$

この手法は自動車のセミアクティブサスペンションへ応用されている^{11,12)}。

5 おわりに

以上、非線形 H^∞ 制御理論を実システムに応用する際に考慮すべき理論の限界と可能性、またその可能性を最大限に利用した（と著者の考える）双線形システムに対する制御系設計法を解説した。本手法は自動車のセミアクティブサスペンションへ応用され、良好な結果を得ている^{11,12)}。

参考文献

- 1) K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover : Robust and Optimal Control. Prentice-Hall, Inc., (1996)
- 2) 美多勉 : H^∞ 制御, 昭晃堂, (1994)
- 3) 三平満司 : 実用化のための H^∞ 制御理論入門, インターフェース, 9 (1993), 120.
- 4) 三平満司 : 実用的な H^∞ 制御の基礎, 日本油空圧学会誌, 28 (1997) 4, 395.
- 5) G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith : μ -Analysis and Synthesis Toolbox. The MathWorks, Inc., (1994)
- 6) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali : LMI Control Toolbox User's Guide. The MathWorks, Inc., (1995)
- 7) 古賀雅伸 : 制御・数値解析のための MaTX (CD-ROM 付き), 東京電機大学出版局, (2000)
- 8) 内田健康他 : H^∞ 制御の実プラントへの応用, コロナ社 (計測自動制御学会), (1996)
- 9) 井村順一 : 非線形 H^∞ 制御一線形系の H^∞ 制御は非線形系にどこまで拡張可能かー, 計測と制御, 34 (1995) 3, 188.
- 10) A. J. van der Schaft : L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. Springer-Verlag, (1996)
- 11) 三平満司, 大作覚, 上村一整 : 非線形 H^∞ 制御理論の限界と可能性ーミセミアクティブサスペンションへの応用, システム／制御／情報, 43 (1999) 10, 544.
- 12) 大作覚, 三平満司, 清水悦郎, 富田晃市 : 非線形 H^∞ 制御によるセミアクティブサスペンション, 計測と制御, 39 (2000) 2, 126.

(2003年5月28日受付)