

# 入門講座

計測・制御技術入門 計測技術-1

## 計測における逆問題解析

Inverse Analysis in Measurement

小島史男  
Fumio Kojima

神戸大学 大学院自然科学研究科  
機械システム科学専攻 教授

### 1 はじめに

計測器（センサ）は環境の時々刻々の変化を検出し、さまざまな人工システムを円滑に制御するための情報を提供している。計測器は環境の変化に呼応した何らかの特性変化を物理的信号としてわれわれに提供する。提供されたデータから環境に関する情報を得る作業が逆問題解析である。逆問題解析は、ある事象が起こった結果からその原因を探る行為であり、計測という作業そのものは逆問題解析の第1段階といえる。計測データを加工し、その意味を理解することは従来信号処理、信号解析の分野と理解され、画像解析や音声認識など数多くの研究分野が展開されている。これらは基本的には、計測データを離散化・量子化し、フィルタリングなどの離散処理を通じて、連続信号に変換する作業である。このような作業は逆解析の第2段階といえる。逆問題解析は信号に対する理解をさらにモデルを通じて行う。すなわち、計測データとそのデータを生成する原因との因果律をさまざまな数学モデルで記述し、データの背後にある原因を特定し、何らかの方法で可視化・定量化を行う。

逆問題解析は、応用数学、応用物理学、計算科学にまたがる大きな研究分野であり、またその工学的応用分野として、この10年間盛んに研究されてきており、いろいろな啓蒙書、国際学術雑誌も多数出版されている（たとえば<sup>1-3)</sup>）。筆者が逆問題（Inverse Problem）という、興味深い言葉を目にしたのはいまから20年以上も前のことである。石油資源探査に関するフランスの数学者Chaventの論文<sup>4)</sup>は、それまでの方法論とは異なる物理事象の数学モデルを用いた手法であり、これは今日にいたるまで、逆問題解析の一般的な手法となってきた。この解説においては、計測データを用いたさまざまな逆問題解析の計算手法について解説を試みる。

### 2 不適切問題と正則化技術

図1にあるように、逆問題は探索すべき空間上のパラメータ  $\theta$  と提示される計測データ  $y$  との写像  $f$  を数学的問題

$$f(\theta) = y \dots\dots\dots (1)$$

として記述できると仮定する。探索すべき空間（パラメータ空間）から、計測データへの空間の写像  $f$  を順問題、その逆写像  $f^{-1}$  を逆問題という。順問題解析では写像  $f$  の  $\theta$  から  $y$  への連続性、もしくはパラメータ  $\theta$  が与えられたときに、観測データが一意に存在するかどうかを考察する。図1の順問題解析で、写像  $f$  が連続であったとしても、これはただちに逆解の存在性、一意性を保証するものではない。逆問題解析において、解の存在性、一意性およびデータに関する解  $\theta$  の連続性（安定性）の保証がどれかひとつでもとれないとき、これを不適切問題とよび、これを如何なる方策でもって適切な問題に仕上げるかということが、応用数学上重要な研究テーマである。計測器は環境の変化を、光の反射、音の伝搬、熱の放射、あるいは電磁場の変化などの物理量として提供する。したがって、逆問題解析の数学モデルが、その写像空間を支配する物理法則にもとづいて構築できる場合は、比較的容易に問題を定式化することが可能となる。この場合、考慮すべきは

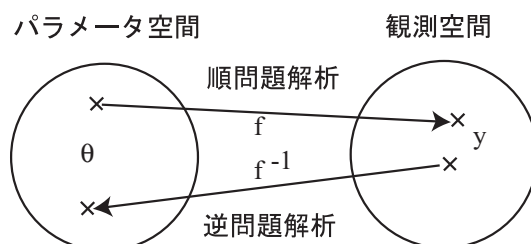


図1 順問題と逆問題

- (1) システムを支配する状態量とその物理法則
- (2) 定義される空間とその境界条件
- (3) 計測器の配置、計測の方法

である。よくある逆問題例としては、図1の写像 $f$ が畳み込み積分等の積分方程式

$$\int k(x-x')\theta(x')dx=y(x) \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる場合がある。一方、入力があらかじめ設定されているか、既知関数 $v(x')$ で与えられ、伝達要素 $k(x-x';\theta)$ のなかに、推定すべきパラメータ $\theta$ が隠されている場合、すなわち

$$\int k(x-x';\theta)v(x')dx=y(x) \quad \dots\dots\dots (3)$$

によりパラメータ $\theta$ を推定する問題がある。これをパラメータ同定 (Parameter identification) といって、前者とは区別されている。非破壊評価における逆問題の多くは後者に属する。本章では前者の逆解析について説明し、後者のパラメータ同定は次章で述べることにする。たとえば、2次元空間 $\Omega$ 上での磁気イメージの復元では、ビオサバールの法則やアンペールの法則に適切な制約をほどこすことにより、(2) 式が

$$k(x-x')=\iint_{\Omega}\{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+d^2\}^{-\frac{1}{2}}dx_1dx_2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる場合がある<sup>5)</sup>。ここでは $d$ は観測点と検査面との距離に相当するが、この距離が大きくなるほどデータの特異性が失われる。つまりセンサの解像度が落ちてしまう。(2) 式は計測データ $y$ を用いて、以下の最小自乗問題

$$J(\hat{\theta})=\min_{\theta}\frac{1}{2}\|K\theta-y\|^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

の最適解を求める問題として定式化できる。ここで大文字の $K$ は積分核に $k$ をもつ積分作用素である。以後差分法により問題を解くことにする。このとき、上記の最適解は問題空間を離散化することにより線形代数方程式

$$[\hat{K}_h]^t[\hat{K}_h]\{\hat{\theta}_h\}=[\hat{K}_h]^t\{y_h\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

に帰着される。センサの解像度が落ちるとS/N比が下がり、上記の係数行列の性質が悪くなって正しい逆解は得られない。図2 (a) を復元すべき元画像、図2 (b) は (2) 式および (4) 式から計算された疑似データにノイズを加えた画像である。これをみてわかるように、ノイズに埋もれた計測データから元のデータに近い復元画像を得るには、何らかの工夫が必要となる。Tikhonovの正則化では、最適化問題 (5) に下記の修正項を加えて最適化する問題である。

$$J(\hat{\theta})=\min_{\theta}\frac{1}{2}\|K\theta-y\|^2+\frac{\alpha}{2}\|\nabla\theta\|^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

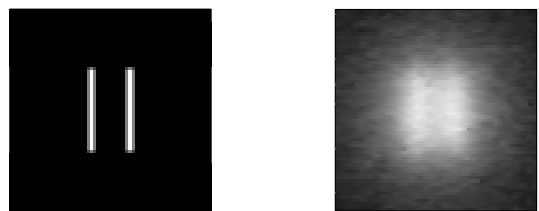
のような最適化問題として定式化する。これは結局

$$([\hat{K}_h]^t[\hat{K}_h]-\alpha[\nabla_h^2])\{\hat{\theta}_h\}=[\hat{K}_h]^t\{y_h\} \text{ on } \Omega \dots\dots\dots (8)$$

を解くことになる。図3 (a) は雑音に乱された磁気イメージを正則化手法により復元した例である。図2 (b) での乱れたイメージは平滑化され、図2 (a) に近い画像が得られる。Tikhonovの正則化は結局楕円型方程式の拡散項となるが、平滑化の効果は拡散項の係数 $\alpha$ で制御される。図3 (b) で明らかに、拡散係数 $\alpha$ を大きくとると、本来の信号成分自体も消散してしまうので、この係数のチューニングは重要である。この係数選択についてはL-Curve法がよく知られている。この方法の詳細は文献<sup>6)</sup>にゆずるが、拡散係数の影響は考察する全領域に均等に配置されるので、係数 $\alpha$ を大きく取ると本来必要な情報もノイズと同じように平滑化されてしまうことが問題となる。そこで正則化の効果を局所的に配置するいくつかの有効な方法が検討されつつある。たとえば、さきの正則化問題 (7) に、Bounded Variationと呼ばれる非線形項を加える方法は有効である。新しい計算的方法については最近SIAMからだされた成書があるので参照されたい<sup>7)</sup>。

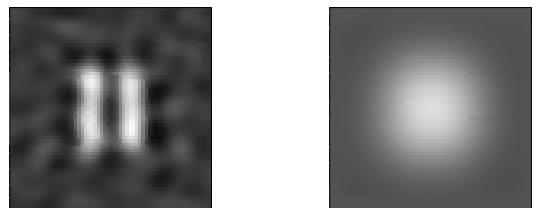
### 3 モデル規範型逆問題解析

非破壊検査に関連する逆問題は、検査のプロセスの物理的背景が明らかであることから、逆問題の適用事例として、さかんに研究されている。非破壊試験においては、検査の対象領域に何らかの物理的な浸襲を加え、これに対する応答を計



(a) ソース源 (b) 観測画像

図2 ソース画像とノイズを含んだ観測画像



(a)  $\alpha = 1.0\text{e-}6$  (b)  $\alpha = 1.0\text{e-}3$

図3 Thikhonovの正則化による復元画像

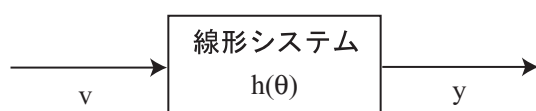


図4 非破壊試験の線形システム表現

測データとして入手し、検査対象領域の情報を得る。この過程は図4の線形システムにおいて入出力情報から伝達特性の変化を検出することとなり、これを数式で記述したのが(3)式である。本章では、(3)式で定式化される逆問題解析について考察する。さて、前章と同様に(3)式にもとづく逆問題を(7)と同様に最小自乗誤差の意味で最適化すると、この逆問題は

$$J(\hat{\theta}_a) = \min_{\theta} \frac{1}{2} \|K(\theta)v - y\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \theta\|^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

の形式表現を得る。この問題は明らかにパラメータ $\theta$ に関して非線形となり、前章のような直接解法により逆解を求めることはできない。一般的にいうて積分表現の数値解を求めることは、計算資源の使い方やアルゴリズムの構成からいっても非効率である。パラメータ同定の問題では、システムを微分表示し、数値モデルを構成する。以下では、渦電流探傷法を想定した電磁非破壊評価を例にあげてモデルの構成を考える。図5は検査方法の概要をあらわしたものである。この図では、パンケーキ型コイルプローブを励磁し、検査材料内部で発生した渦電流を発生させる。発生した渦電流による反作用磁場による誘起電圧をインピーダンス変化として検出し、材料に発生するき裂の存在の有無を検査する方法を示している。図5では、材料裏側に発生するき裂に対して、表側をスキャンしている励磁コイルをき裂欠陥の裏側を長さ方向に移動させて、コイルのインピーダンス変化の軌跡(リサージュ波形)を検査データとして入手している様子を示している。いまき裂を含む検査材料の形状を、Bスプライン関数を用いて、

$$h(x; \theta) = \sum \theta_i B_i(x) \quad \dots\dots\dots (10)$$

のように、そのフーリエ係数のベクトル $\theta = \{\theta_i\}$ で特徴づける。図6はこの特徴付けを図示した例である。この場合 $\theta$ はきずの位置情報、サイジングをあらわすパラメータとなる。この検査手続きの数学モデルは、Maxwellの方程式から磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と電気スカラーポテンシャル $\phi$ によって求めることができる<sup>8)</sup>。パンケーキ型コイルに印加する交流の励磁電流密度を $\mathbf{J}_f$ とすると、空気領域( $R^3 - \bar{V}(\theta)$ )における磁気ベクトルポテンシャルは次のポアソン方程式に支配される。

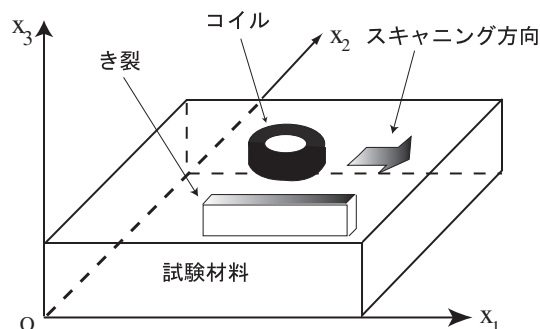


図5 渦電流探傷法の概念図

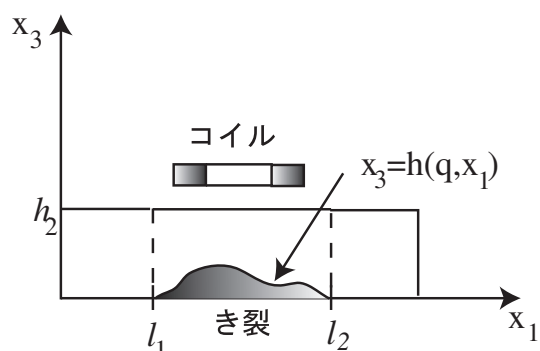


図6 欠陥の形状モデリング

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}_f \quad \text{in } R^3 - \bar{V}(\theta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで $\mu_0$ は真空中の透磁率を、 $V(\theta)$ はクラックがはいった導体の形状をあらわす。導体領域(試験材料) $V(\theta)$ の磁気ベクトルポテンシャルは、導電率を $\sigma$ として、次の連立方程式で与えられる。

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} = j\omega\sigma (\mathbf{A} + \nabla\Phi) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\Phi) = 0 \quad \text{in } V(\theta) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$\omega$ は励磁コイルに印加する交流電流の角周波数である。(12) - (13)式の $\Phi$ は電気スカラーポテンシャルの時間微分である。渦電流によるインピーダンス変化

$$y(\theta) = [H] \{\mathbf{A}, \Phi\}(\theta, \mathbf{J}_f) \quad \dots\dots\dots (14)$$

が観測データに対応するモデル出力となる。 $H$ はデータ取得に関連する積分作用素である。以上の定式化において、(3)式の入力 $v$ はコイルの励磁電流 $\mathbf{J}_f$ に相当し、モデルの状態量 $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ は補助変数となる。以下、このモデルを用いてパラメータ同定を行うには、

- (1) 入出力関係を求めるための順解析数値解析モデルの構築
- (2) 非線形最適化問題(9)を解くための最適化手法の導入の手順で逆解析は実行される。

## 4 計測装置と順解析モデル

前章の偏微分方程式で記述される解析モデルは有限差分法、有限要素法、境界要素法（境界積分法）などの近似法を用いて計算モデルを構成することができる。どの近似モデル、およびその組み合わせを使っても解析モデルがシステムの状態変数、観測データに関して線形であるかぎり

$$[A(\theta)]\{u\} = \{v(\theta)\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\{z\} = [H(\theta)]\{u\} \dots\dots\dots (16)$$

という表現形式を得る。結局システムモデル (15) および観測機構 (16) の等式制約のもとで最適化問題 (9) を解くことになる。数値解析の実現は計測器の性能と密接に関連している。入手可能な計測データから、まず空間座標系の構成を考える。たとえば、システムモデルが2次元空間で記述できるのか、3次元空間でとるべきか、あるいは時間軸で考えるのか、周波数領域で考察するかである。さらに、計測器は図5での検査材料の一部を走査するにすぎないので解析領域は材料の一部に限られる。この場合システムの便宜上設定する仮想境界と物理的境界を区別して境界条件を設定する必要がある。有限差分法や有限要素法などの数値解法においては、空間の離散化が解の精度を決めるのであるが、一方、計測器の構造上分解能には制限がある。従って、計測器の性能以上の精緻な空間近似はあまり意味をなさない場合が多い。逆解析問題を解く場合、計算容量の増大はさけられず、実際はいかに順解析を効率よく行うかがもっとも重要な事項となる。たとえば上述の渦電流解析の場合、解析モデルは4次元の複素数ベクトルを3次元空間上で解く必要があり、インピーダンス変化の計算には通常途方もない大容量の計算を実行しなければならない。そのため、逆解析手法の計算アルゴリズムには計算容量を節約するさまざまな方法が提案されている<sup>10)</sup>。

## 5 パラメータ推定の計算法

積分核 (2) のパラメータ  $\theta$  は上述の問題では、数式モデルの定義域  $V(\theta)$  で表現されている。このパラメータ  $\theta$  は結局 (15) 式や (16) 式の要素行列や要素ベクトルに内挿される。パラメータの設計法の例としては結局計測データから如何なる情報を得るかによって決定される。表1は日本AEM学会で1999年から2000年にかけて実施された国際ベンチマーク問題のき裂欠陥評価に関する優先項目である<sup>9)</sup>。これは原子力プラントの伝熱管サンプルに関するマスク試験片に関する渦電流探傷データを提供し、き裂を推定する各種アルゴリズムの評価を行ったものである。表1のなかで、欠陥深さ、欠陥長さなど欠陥のサイジングについては、(10) のように

パラメータベクトル  $\theta$  と計測データとのあいだで連続写像を定義できる。従って最適化問題 (9) は、パラメータ  $\theta$  に関する評価関数の感度  $\nabla_{\theta} J(\theta)$  を用いて、

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \lambda_k d^{(k)} (\nabla_{\theta} J(\theta^{(k)})) \quad k=0, 1, 2, \dots \dots\dots (17)$$

のような繰り返し計算で逆解  $\hat{\theta}_a$  を求めることができる。図7は、日本AEM学会のベンチマーク問題で与えられた放電加工による20%–60%深さのスロープ形状の人工欠陥モデルの断面写真であり、図8はその実験データを使用して、本章で述べた感度解析アルゴリズムを用いて行った推定結果である<sup>11)</sup>。

表1の欠陥識別性でき裂の個数を求める問題や、それと同時に複数欠陥のおおのサイジングを行うときは、この方法は、局所最適解に落ち込むことが多く、推定すべき解の近傍に初期値がないと発見できない。このことから、最近は遺伝的アルゴリズムを代表とする進化計算による最適化手法を用いる方法がある。この方法では、解の候補  $\theta$  を複数作成しその個体群のなかから、生命の進化形態を模倣した新たな個体を遺伝子作用素を用いて次々と世代交代させて、多様な解の候補を生成し、そのなかから適応度の高い、すなわち、(9) 式で記述されるモデル出力と観測データ誤差のより小さい個

表1 逆解析の評価項目優先評価

| 優先順位 | 評価項目   | 仕様          |
|------|--------|-------------|
| 1    | 方向識別性  | 周、軸方向欠陥、減肉  |
| 2    | 欠陥識別性  | 単一、複数欠陥（個数） |
| 3    | 欠陥深さ精度 | 最大深さの10% 以内 |
| 4    | 欠陥長さ精度 | 1mm 以内      |

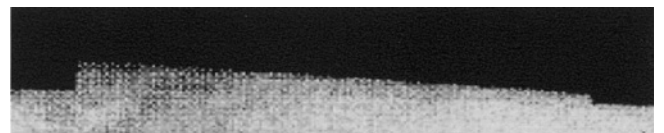


図7 人工欠陥モデルの断面図  
(日本AEM学会 図上部がサンプル部分)

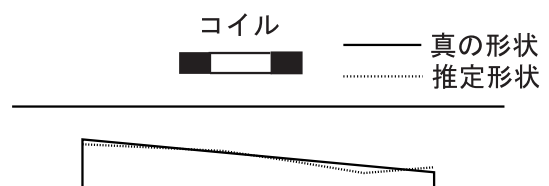


図8 欠陥推定の例（感度解析による推定）

体を生成していく方法である。この方法では、多目的最適化が容易に行えることから、材料の欠陥検知のような複雑な逆解析においても比較的簡単なアルゴリズムで推定計算できる。図9は先のベンチマーク問題のひとつであるSCC（応力腐食割れ）の断面図である<sup>12)</sup>。この渦電流探傷データに遺伝アルゴリズムを適用し複数欠陥のサイジングを行った結果を図10に示す。ここでは欠陥部分を含む有限要素分割で欠陥の推定領域を図示している。3個の欠陥について良好な推定値を得ている。

## 6 おわりに

本稿では、逆問題解析に関する最近の流れを包括的に解説することを試みた。モデル規範型逆問題解析 (Model based Inverse Analysis) は、“測る”ことから、問題を構成する。まずセンサの解像度や、測定方法を考慮して、検査過程のモデルをつくる。非破壊検査における計測データは、音、振動、熱、電磁場などの物理量である。非破壊評価に関するパラメータと計測データとの関係づけを数学的に行うためには、まず欠陥情報とこの情報を計測器が収集するまでの過程のモデル化が必要となる。つぎに検査対象に含まれる欠陥の幾何学情報のパラメータ表現を行い、この欠陥を含む媒体を伝搬し

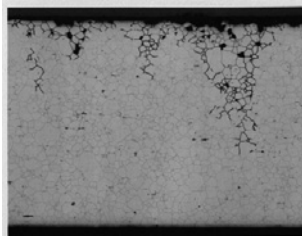


図9 配管サンプルの応力腐食割れ（日本AEM学会）

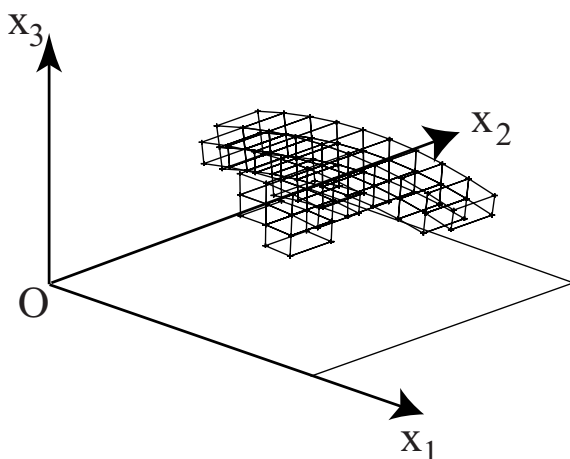


図10 欠陥推定の例（遺伝アルゴリズムの適用事例）

ていく物理量の特性を数式で記述する。例えば音の伝播は波動方程式であり、熱なら拡散方程式、電磁場ならマクスウェルの方程式などにもとづいて、検査システムのモデリングを行う。システムモデルの定義される領域や問題の構造を考慮して、有限要素法や境界要素法などの適切なシミュレーション技法を用いて順解析の計算モデルを作成する。これらの一連の操作は本解説で例に挙げた渦電流探傷への適用以外にもいろいろ考えられる。筆者は、これまで、サーマルトモグラフィによる欠陥復元<sup>13)</sup> 柔軟アームの振動を利用した非破壊評価法<sup>14)</sup>、や高温超伝導量子干渉素子を用いた非破壊評価<sup>15,16)</sup> に上記の計算手法の適用を試みてきたので関心のあるかたは参照していただくと幸いである。産業応用の立場からは解析で必要となる膨大な計算をいかに節約するかは現時点でも大きな問題である。また最近では、ひとつの計測装置によるデータを解析するだけではなく、異種の計測情報を同時に用いて、それぞれの特徴を生かしてさらに逆問題解析の精度をあげる試みがはじまっている。たとえば、原子力プラントでのき裂サイジングの精度の向上をめざして、超音波探傷と渦電流探傷を組み合わせる方法や、また両方の長所を検査法自体にあわせもったEMAT法などはその例である。逆解析の実用化をはかるには、複数のセンサ群による異種、異次元の情報を複合的に利用し、これらの情報の統融合をはかる、いわゆるセンサリー・ネットワークの結合が、今後逆解析の工学への実用化に向けてさらに重要になってくると考えられる。

## 参考文献

- 1) 山本昌宏：逆問題入門，岩波講座 物理の世界，岩波書店，(2002)
- 2) Inverse Problems, ISSN : 0266-5611, Institute of Physics Publishing, UK, 1985-Present.
- 3) Journal of Inverse and Ill-posed Problems, VSP, The Netherlands, 1993-Present.
- 4) A. Bamberger, G. Chavent, and P. Lailly : About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations — application to the interpretation of seismic profiles, Applied Mathematics and Optimization, 5 (1979) 1, 1.
- 5) Z. Chen, K. Aoto, and K. Miya : NDE of fatigue damage in austenite stainless steel by measuring and inversion of damage-induced magnetic field, Electromagnetic Nondestructive Evaluation (VI), Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, IOS Press, Amsterdam, 23 (2002), 127.
- 6) 小島史男, 上坂充：電磁現象と逆問題，養賢堂，(1999)

- 7) C. Vogel : Computational Method for Inverse Problem, SIAM Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, (2003)
- 8) 坪井始, 内藤督 : 実践数値電磁解析法, 養賢堂, (1995), 127.
- 9) <http://wwwsoc.nii.ac.jp/jsaem/>
- 10) Z. Chen and K. Miya : ECT inversion using a knowledge-based forward solver, Journal of Nondestructive Evaluation, 17 (1998), 167.
- 11) 小島史男, 岡本十蔵, 大野泰彦 : 有限要素・境界要素併用法を用いた電磁場逆解析による蒸気発生器細管材料のき裂形状推定に関する計算手法, 日本機械学会論文集 (C編), 63 (1997) 612, 2650.
- 12) F. Kojima, N. Kubota, F. Kobayashi, and T. Takagi : Shape recovery of natural crack using evolutionary programming related to eddy current testing, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 15 (2001/2002) 1-4, 243.
- 13) H.T. Banks, F. Kojima, and W.P. Winfree : Boundary estimation problems arising in thermal tomography, Inverse Problems, 6 (1990), 121.
- 14) 小島史男, 門嶋勝 : パラメータ推定による柔軟マニピレータのオンライン非破壊評価の一手法, 日本機械学会論文集 (C編), 63 (1997) 605, 135.
- 15) 小島史男, 河合亮佑, 葛西尚子, 廿日出好 : パラメータ推定による超伝導量子干渉計を用いた定量的非破壊評価計算法 (第2報, 周波数応答による深さ方向欠陥形状同定), 日本機械学会論文集 (C編), 67 (2001) 657, 1373.
- 16) H.T. Banks and F. Kojima : Identification of material damage in two-dimensional domains using the SQUID-based nondestructive evaluation system Inverse Problems, 18 (2002) 6, 1831.

(2003年7月23日受付)