



確率共鳴

Stochastic Resonance

堀田武彦

Takehiko Horita

東京大学 大学院情報理工学系研究科
数理情報学専攻 助教授

1 はじめに

確率共鳴 (Stochastic Resonance¹⁾ *1とは、非線形な力学系において微弱な信号の検出性能が適度なノイズの下で最大化されるという現象である。すなわち、確率共鳴では信号の検出にノイズが役に立つというのである。確率共鳴は、初め、氷河期のサイクル (約10万年) と地球の軌道の離心率のわずかな変動サイクル (同じく約10万年) とを関係付ける理論^{2,3)}として提案された。その後、多くの研究がなされ²⁾、シュミットトリガー回路、リングレーザ、SQUIDなどの物理系での実験も行われている。また、特に生物系においてその重要性が着目されており、たとえば、ザリガニの感覚神経⁹⁾、ヘラチョウザメのプランクトンの感知¹⁰⁾、人間の触覚¹¹⁾などにおいてノイズが役に立つことが実験的にも確かめられてきている。以下では、この確率共鳴について紹介したい。

2 双安定系

地球温度の変動は、太陽放射の吸収と熱輻射による放出との熱収支のバランスによってひき起こされる。一旦、氷で覆われはじめると反射率が大きくなって太陽放射の吸収率が下がり低温化が促進される。逆に、氷が融けはじめると太陽放射の吸収率が上がり低温化が促進される。このように地球は、氷河期と間氷期という2つの安定な状態を持つ双安定系であると言える。また、大気の流れや海流などの短い時間スケールでの熱収支の変動の影響は、長い時間スケールでの変動に対してはノイズとして扱うことができるであろう。さらに、

地球の軌道の離心率の周期変動の結果として太陽からの放射量は周期変動し周期的な外力の役割を果たす。

以下では、まず、双安定系について紹介し、さらにノイズが加わった場合の運動について考える。

力学の問題として双安定系を考えるために、次の式に従う質量 m の物体の1次元の運動を考える。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} + f \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 t は時刻、 x は位置、 V はポテンシャルエネルギー、 γ は摩擦係数、 f は外力を表す。摩擦係数が大きく慣性力が無視できる場合 (過減衰極限) には、 $\gamma^{-1}t \rightarrow t$ とおきかえて、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} + f \dots \dots \dots (2)$$

が得られる。 $f=0$ の場合には、 V の極小点は安定な静止状態である。たとえば、

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \dots \dots \dots (3)$$

$f=0$ の場合には、 $V(x)$ の2つの極小点 $x=\pm 1$ を安定状態として持ち、 $V(x)$ の極大点 $x=0$ 以外の任意の初期値から出発した軌道は時間とともに $x=1$ または $x=-1$ へと漸近する。このような2つの安定状態を持つ系は双安定系と呼ばれている。

$f \neq 0$ の場合にも、 f が有界で十分に微弱であればポテンシャルの極大点を越えることが出来ないため、いずれかの極小点の近傍へと漸近しその近くにとどまることになる^{*3}。一方、 f がガウシアンホワイトノイズ $\xi(t)$ ^{*4}などの場合には、ポテンシャルの極大点を越えることが可能となり、1つの極小点の近傍から別の極小点の近傍への遷移が起こる。

*1 確率共振と訳されることもある。

*2 たとえば、文献4, 5, 6, 7, 8)のレビューを参照。

*3 氷河期、間氷期の場合にも、離心率変動の大きさは微弱でこれのみによって2つの状態の間の遷移を説明することは出来ない。

*4 $\xi(t)$ はノイズ強度を D として $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \xi(s) \rangle = 2D \delta(t-s)$ を満たす。

Kramers¹²⁾は、ノイズ強度 D が小さい場合に、極小点 x_m の近傍から極大点 x_0 を越える際の単位時間当たりの遷移率(平均遷移回数)が

$$r(x_m) \simeq (2\pi)^{-1} \sqrt{V''(x_m)|V''(x_0)|} e^{-\Delta V/D} \quad \dots\dots\dots (4)$$

というArrhenius型の式により与えられることを示した。ただし、 $\Delta V \equiv V(x_0) - V(x_m)$ であり、 V'' は2階微分を表す。今の場合、図1に示すように x_+ 、 x_- の2つ極小を考えているので $x_+ \rightarrow x_-$ 、 $x_- \rightarrow x_+$ のそれぞれの遷移率が $W_+ \equiv r(x_+)$ 、 $W_- \equiv r(x_-)$ となる。

図2は、式(2)、(3)について、 $f = \xi(t)$ 、 $D = 0.1$ の場合の $x(t)$ を示したものである。このように軌道は、2つの谷(極小点)の間を確率的に遷移する。

3 確率共鳴

ノイズの他に微弱な周期信号が外力として加わっていると、

$$f = A \sin(\Omega t) + \xi(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

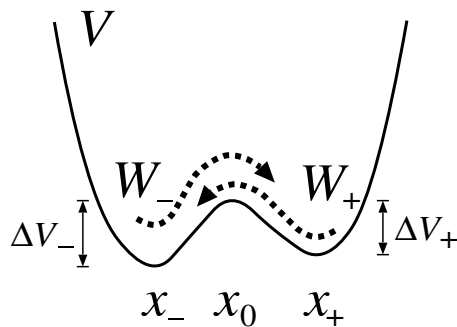


図1 双安定系の $V(x)$

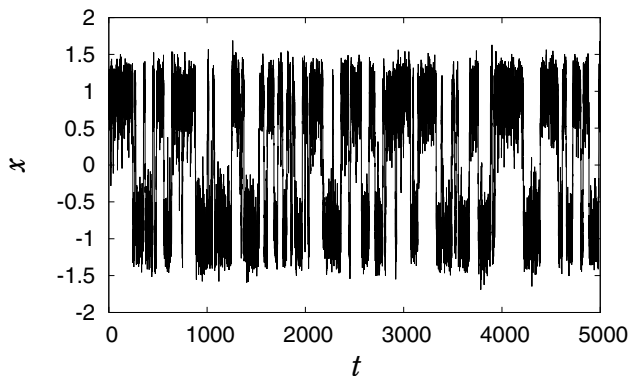


図2 ガウシアンホワイトノイズ $f = \xi(t)$ 、 $D = 0.1$ の場合の $x(t)$

の場合について考える。図3は、 $A = 0.11$ 、 $\Omega_s = \pi/500$ 、 $D = 0.03, 0.1, 0.5$ について $x(t)$ を示したものである。ノイズ強度の小さい $D = 0.03$ の場合には、2つの谷の間の遷移が起こり難く周期信号の影響はそれぞれの谷の中での小さな変動として現れている。一方、ノイズ強度の大きい $D = 0.5$ の場合には、2つの谷の間の遷移が頻繁に起こるが、周期成分はノイズに埋もれその強度はやはり小さいものとなっている。ところが、中程度のノイズ強度である $D = 0.1$ の場合には、2つの谷の間の移り変わりが周期信号を反映したものになっていることがみてとれる。すなわち、この系では、ノイズ強度が適度な場合においてのみ、微弱な周期信号が増幅されるという奇妙な特徴を持つ系であるといえる*⁵。

この性質をはっきりと見るためにパワースペクトル

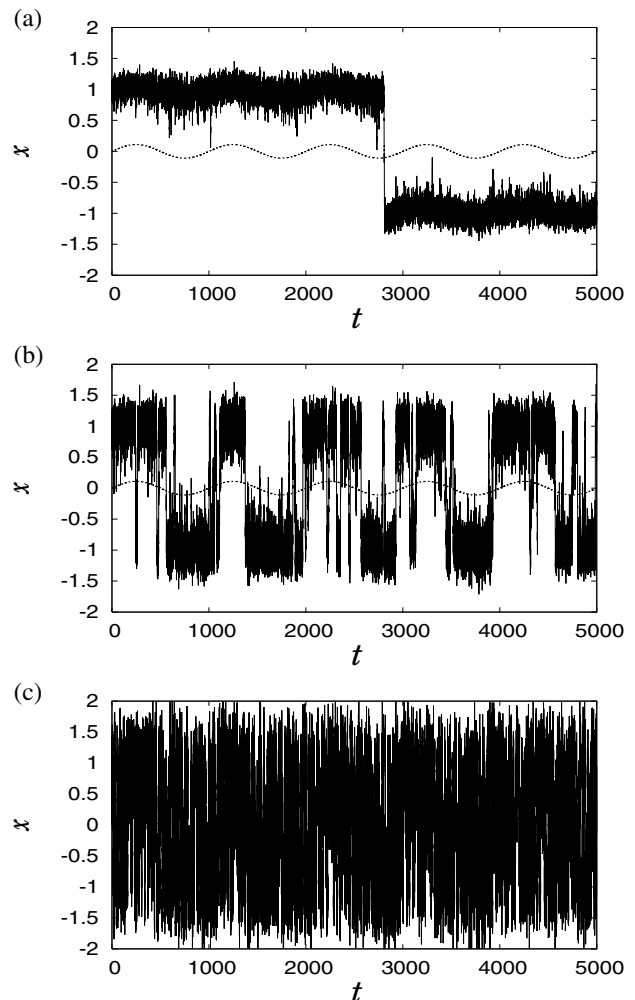


図3 $f = A \sin(\Omega t) + \xi(t)$ 、 $A = 0.11$ 、 $\Omega = \pi/500$ 、(a) $D = 0.03$ 、(b) $D = 0.1$ 、(c) $D = 0.5$ の場合の $x(t)$ 。 $A \sin(\Omega t)$ も同時に示してある。

*5 このことは、氷河期、間氷期の遷移の場合には、もしも図3(b)のような状況になっているのであれば、氷河期のサイクルと離心率の変動のサイクルとが関係付くことを意味する。

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_0^T x(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle \dots\dots\dots (6)$$

を導入する。ここで $\langle \cdot \rangle$ は、ランダムな成分に関する平均操作を表す。図4は、図3に対応したパワースペクトルを数値的に求めたものである。図からわかるように周期信号の角振動数 Ω の近傍でパワースペクトルは周期成分を表すデルタピークと連続成分 $S_N(\omega)$ とからなる。そこで、出力の信号対雑音比 (SN比) を $S_N(\Omega)$ と周期成分の強度の比

$$SNR \equiv \frac{\int_{\Omega-\epsilon}^{\Omega+\epsilon} S(\omega) d\omega}{S_N(\Omega)} \dots\dots\dots (7)$$

として定義することが適切であると考えられる。

図5は、SN比と周期成分の強度を数値的に求めたものである。たしかに、ノイズ強度 D の関数としてSN比があるノイズ強度で最大となっていることがわかる。また、非常に小さいノイズ強度においてSN比は大きい値をとっているが、その場合、周期成分の強度自身は小さな値をとっており入力信号が増幅されているという状況ではない。これは、図3 (a)

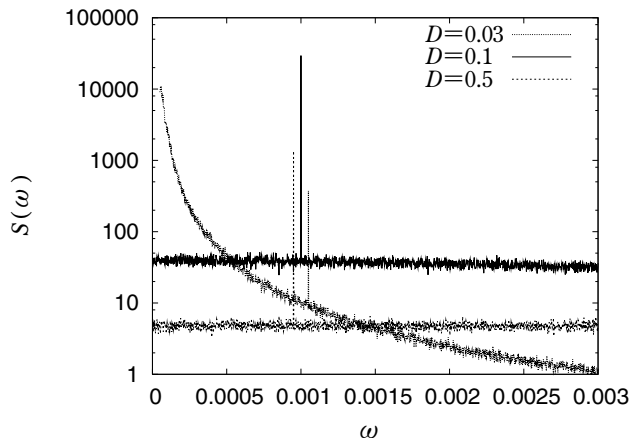


図4 パワースペクトル $S(\omega)$ 。ノイズ強度は図3に対応している。また、見やすくするため互いに水平にずらしてプロットしてある。

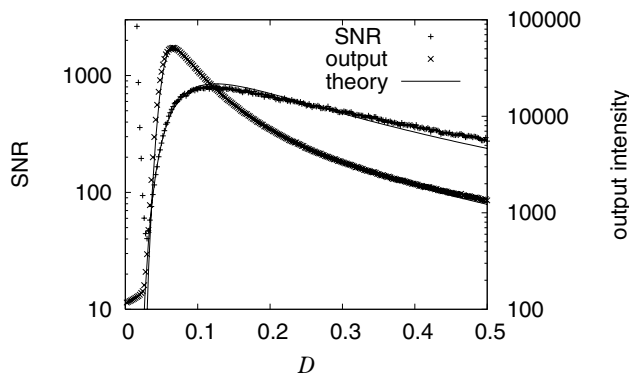


図5 SN比と周期成分強度のノイズ強度依存性。記号はシミュレーションの結果、実線は理論を表している。

のように1つの谷内にのみ滞まっている運動が支配的となっているためである。

図5の実線は、McNamaraら¹³⁾の2状態モデルを用いた理論によるものであり、これによりうまく説明されることがわかる。次の節ではこの2状態モデルについて紹介する。

4 2状態モデル

図3を見ると、連続的な値とる $x(t)$ の代わりに2つの谷に対応した2つの離散的な値をとる $\bar{x}(t) \in \{x_-, x_+\}$ を用いて近似することが妥当であると考えられる。以下では、このような2つの状態を持つ $\bar{x}(t)$ について考える。周期外力がない場合には、 $\bar{x}=x_-$ の状態から $\bar{x}=x_+$ の状態への遷移の遷移率は W_- であり、この逆の遷移の遷移率は W_+ である。今、周期外力の振動数が $W_{\pm}$ の大きさとくらべて十分に小さいとすれば周期外力の影響を断熱的に取り込むことが可能となる。すなわち、時間に依存するポテンシャル

$$V(x, t) = V(x) - xA \sin(\Omega t) \dots\dots\dots (8)$$

を考えると、 $V(x, t)$ は常に2つの極小点を持ち、その時間変化が十分にゆっくりしたものであれば各時刻での遷移率は式(4)の V を式(8)で置き換えたものによって与えられることになる。このようにして時間に依存した遷移率 $W_{\pm}(t)$ を考えることができる。さらに A は十分小さいとして A の1次の項までをとると

$$W_{\pm}(t) \simeq (2\pi)^{-1} \sqrt{V''(x_{\pm}) |V''(x_0)|} e^{-\Delta V_{\pm}/D} (1 - \frac{A \Delta x_{\pm}}{D} \sin(\Omega t)) \dots\dots\dots (9)$$

と与えられる。 $(W_{\pm}(t) > 0)$ ここで、 $x_{\pm}$, x_0 は $A=0$ の場合の極小点、極大点であり、 $\Delta V_{\pm} \equiv V(x_0) - V(x_{\pm})$, $\Delta x_{\pm} \equiv x_{\pm} - x_0$ である。

時刻 t で $\bar{x}(t) = x_+$, $\bar{x}(t) = x_-$ である確率をそれぞれ $n_+(t)$, $n_-(t)$ とすると

$$\frac{dn_+(t)}{dt} = W_-(t) n_-(t) - W_+(t) n_+(t) \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{dn_-(t)}{dt} = W_+(t) n_+(t) - W_-(t) n_-(t) \dots\dots\dots (11)$$

が成り立つ。 $\Delta n(t) \equiv n_+(t) - n_-(t)$ とおけば $n_+(t) + n_-(t) = 1$ であるので

$$\frac{d\Delta n(t)}{dt} = -[W_+(t) + W_-(t)] \Delta n(t) - W_+(t) + W_-(t) \dots\dots\dots (12)$$

となり、これを解いて

$$\Delta n(t) = e^{-R(t, t_0)} \Delta n(t_0) - \int_{t_0}^t e^{-R(t, s)} [W_+(s) - W_-(s)] ds \quad \cdots (13)$$

となる。ただし、

$$R(t, s) \equiv \int_s^t [W_+(s') + W_-(s')] ds' \quad \cdots (14)$$

である。 $t-s \rightarrow \infty$ のとき $R(t, s) \rightarrow \infty$ であることより、 $t_0 \rightarrow -\infty$ として定常状態を求めると

$$\Delta n_s(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-R(t, s)} [W_+(s) - W_-(s)] ds \quad \cdots (15)$$

となる。また、外力の周期 $T_s \equiv 2\pi/\Omega$ について $W_{\pm}(t+T_s) = W_{\pm}(t)$ であることより $\Delta n_s(t+T_s) = \Delta n_s(t)$ であることが確かめられる。この Δn_s を用いると

$$\Delta n(t) = e^{-R(t, t_0)} [\Delta n(t_0) - \Delta n_s(t_0)] + \Delta n_s(t) \quad \cdots (16)$$

と表される。

簡単のため $x_{\pm} = \pm 1$ であるとし、 $n_{\pm}(t) = (1 \pm \Delta n(t))/2$ であることに注意すると、式 (16) より

$$\begin{aligned} \Pr \{ \bar{x}(t) = l' | \bar{x}(s) = l \} \\ = \frac{1}{2} + \frac{l'}{2} [l e^{-R(t, s)} + \Delta n_s(t) - e^{-R(t, s)} \Delta n_s(s)] \\ \cdots (17) \end{aligned}$$

が導かれる。ただし $l, l' \in \{-1, 1\}$ 、 $t \geq s$ である。これより、

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}(t) \bar{x}(s) \rangle \\ = \sum_{l, l'} l l' \Pr \{ \bar{x}(t) = l' | \bar{x}(s) = l \} \Pr \{ \bar{x}(s) = l \} \quad \cdots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \sum_l l \Pr \{ \bar{x}(s) = l \} [l e^{-R(t, s)} + \Delta n_s(t) - e^{-R(t, s)} \Delta n_s(s)] \\ \cdots (19) \end{aligned}$$

$$= e^{-R(t, s)} [1 - (\Delta n_s(s))^2] + \Delta n_s(t) \Delta n_s(s) \quad \cdots (20)$$

が得られる。ここで、

$$\Pr \{ \bar{x}(s) = l \} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta n_s(s)$$

を用いた。また、 $\langle \bar{x}(t) \rangle = \Delta n_s(t)$ である。式 (20) を用いて時間相関関数は、

$$\begin{aligned} C(\tau) \equiv \overline{x(t+\tau)x(t)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t+\tau)x(t) dt \\ \cdots (21) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \langle x(t+|\tau|) x(t) \rangle dt \quad \cdots (22)$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{-R(t+|\tau|, t)} [1 - (\Delta n_s(t))^2] dt \\ + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \Delta n_s(t+\tau) \Delta n_s(t) dt \quad \cdots (23) \end{aligned}$$

と求まる。ここで $R(t+T_s, t)$ は t には依存しない正の定数であることに注意すると、式 (23) の右辺第1項は $|\tau| \rightarrow \infty$ のとき指数関数的に減衰することがわかり、これは乱雑な成分を表している。一方、第2項は τ に関して周期 T_s の周期関数でありコヒーレントな成分を表している。

ここでWiener-Khinchinの定理

$$\begin{aligned} S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(i\omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ \cdots (24) \end{aligned}$$

を用いれば、時間相関関数からパワースペクトルが求められる。式 (23) の第1項からは連続成分 $S_N(\omega)$ が、第2項からはデルタピークが得られる。

ここで、さらに状況を簡単にするために $V(-x) = V(x)$ のような対称性を持つと仮定する。この場合、 $x_0 = 0$ 、 $\Delta V_+ = \Delta V_-$ 、 $\Delta x_{\pm} = \pm 1$ 、 $V''(x_+) = V''(x_-)$ となり

$$W_{\pm}(t) = r(1 \pm \alpha \cos(\Omega t)) \quad \cdots (25)$$

($r > 0$, $0 < \alpha \equiv A/D < 1$) の形に表される。すると、 $R(t+|\tau|, t) = 2r|\tau|$ であるので

$$\Delta n_s(t) = 2r\alpha \int_{-\infty}^t e^{-2r(t-s)} \cos(\Omega s) ds \quad \cdots (26)$$

$$= \frac{2r\alpha \cos(\Omega t - \phi)}{\sqrt{4r^2 + \Omega^2}} \quad \cdots (27)$$

となる。ここで、 ϕ は $e^{i\phi} \equiv (2r + i\Omega)/\sqrt{4r^2 + \Omega^2}$ により定義した。さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{-R(t+|\tau|, t)} [1 - (\Delta n_s(t))^2] dt \\ = e^{-2r|\tau|} \left(1 - \frac{2r^2\alpha^2}{4r^2 + \Omega^2} \right) \quad \cdots (28) \end{aligned}$$

であるので

$$S_N(\omega) = \frac{4r}{4r^2 + \omega^2} \left(1 - \frac{2r^2\alpha^2}{4r^2 + \Omega^2} \right) \quad \cdots (29)$$

が得られる。また、デルタピークは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \Delta n_s(t) \Delta n_s(t+\tau) dt \right] e^{i\omega\tau} d\tau \\ = \frac{2\pi r^2 a^2}{4r^2 + \Omega^2} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \dots\dots\dots (30)$$

と求まる。これより、SN比は

$$SNR = \pi r a^2 \left(1 - \frac{2r^2 a^2}{4r^2 + \Omega^2} \right)^{-1} \\ \simeq \pi r a^2 \frac{A^2}{D^2} \exp \left(-\frac{\Delta V}{D} \right) \dots\dots\dots (31)$$

と求まる。図5の実線はこれを図示したものである。また、周期成分の強度については式(30)の右辺の係数を図示したものである。図5においての D が小さいところでのずれは、2状態モデルでは1つの谷内での運動が説明出来ず、 D が小さい場合には1つの谷内での運動が支配的になるためである。

5 興奮性を持つ系における確率共鳴

神経細胞は興奮性を持つ系であると言われる。すなわち、外部からの刺激が無いまたは弱ければ静止状態を保つが、ある程度以上の刺激を受けた場合にパルス的な変動(発火)を示し再び静止状態へ戻るといった特性を持つ系である。このような興奮性を持つ系の例として、FitzHugh-一南雲方程式や位相 ϕ のみによって記述された

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 - \varepsilon - \sin\phi \dots\dots\dots (32)$$

($0 < \varepsilon \ll 1$) のような系がある。このような系においても外力として微弱な周期信号とノイズがある場合に、発火のパルス列を観測しそのパワースペクトルからSN比を求めると、やはり、適度なノイズ強度においてSN比が最大化されること、また、その様子はパルス列に対して生起率が時間に周期的に依存するポアソン過程を用いてモデル化することで、SN比がノイズ強度に対して式(31)と同様の式に従うことが示されている⁹⁾。さらに、ザリガニの感覚神経を用いた実験においても同様の現象が確かめられている⁹⁾。

このように、確率共鳴は、双安定系および興奮性を持つ系において見られるが、より広い系について見られることも知られている。また、外力についても周期的なものだけではなく非周期的な信号に対しても見られ、この場合にはSN比の代わりに入力と出力の相関係数が適度なノイズ強度で最大化

される。さらに、興奮性を持つ系では、確率共鳴と類似の現象として、外力としてノイズのみがあった場合に生成されるパルス列の周期性の度合いが適度なノイズ強度で最大化されるというコヒーレンス共鳴(coherence resonance)と呼ばれる現象もある。

6 おわりに

これまで、力学的な時間変動をともしう系について確率共鳴現象を見てきたが、より単純な静的な系においても確率共鳴に類似した現象、すなわちノイズが役に立つという現象が存在することを紹介する。たとえば、 $x_1, x_2, \dots, x_N$ があるパラメータを持つ確率過程の実現値であるとし、 c を定数として

$$y_n = h(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_n \geq c \\ -1, & \text{if } x_n < c \end{cases} \dots\dots\dots (33)$$

が観測されているとする。パラメータの事前分布と確率過程の詳細がわかっている場合に、測定器 $h(x)$ を通して観測された $y_1, y_2, \dots, y_n$ からパラメータをベイズ推定するという問題を考える。すると、 ξ_n を強度 D のランダムノイズとして $h(x_n)$ の代わりに $\tilde{y}_n = h(x_n + \xi_n)$ を観測してパラメータを推定したとすると、その推定誤差は最適なノイズ強度において最小化され得ることが示されている¹⁴⁾。このようなことが起こるためには、 $h(x)$ が階段関数であるということが重要ポイントである。実際、 $h(x)$ が単調で逆を持つような関数の場合には、 $\xi_n = 0$ の場合に推定誤差は最小となること示すことが示される。しかしながら、観測の際に制御出来ない誤差 η_n があつて

$$y_n = h(x_n + \xi_n) + \eta_n \dots\dots\dots (34)$$

となるような状況では、 $h(x)$ が逆を持つ場合であっても必ずしも $D=0$ の場合に推定誤差が最小となるとは限らずノイズが役に立つことがある。例えば、図6のように $h(x)$ が区分線形で両端の区間での傾きが小さく中間での傾きが大きい場合には、 η_n による誤差のために実質的には式(33)の階段

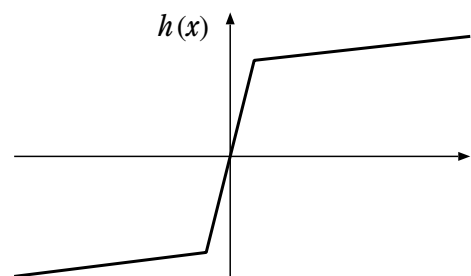


図6 可逆で区分線形な $h(x)$ の例

関数の場合と同様の状況となり、 $\xi_n=0$ ではなく、あるノイズ強度において推定誤差が最小となり¹⁵⁾ノイズが役に立つのである。

今の例で見たように、システムのパラメータが自由に設定でき、ノイズが完全に制御できる場合には、ノイズが役に立つということは無いように思われる。しかしながら、どうしても避けられないノイズがある場合に、ノイズが無いことを前提に設計されたシステムはうまく機能するであろうか、または、うまく機能するとしてもノイズがない場合に比べて性能はどれほど低下するであろうか。確率共鳴という現象は、ノイズが存在しても機能するシステムではなく、ノイズをうまく利用したシステムを構成することが可能であることを示唆している。実際、生物は確率共鳴により積極的にノイズを利用している可能性がある⁹⁻¹¹⁾。これは、生物が進化の過程でノイズを利用するという戦略を必然的に採用した結果であると考えられるのではないだろうか。

参考文献

- 1) R. Benzi, A. Sutera and A. Vulpiani : The mechanism of stochastic resonance, *J. Phys. A*, 14 (1981), L453.
- 2) C. Nicolis : Stochastic aspects of climate transitions — response to a periodic forcing, *Tellus*, 34 (1982), 1.
- 3) R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera and A. Vulpiani : Stochastic resonance in climate change, *Tellus*, 34 (1982), 10.
- 4) F. Moss, D. Pierson and D. O'Gorman : Stochastic resonance : Tutorial and update, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6 (1994), 1383.
- 5) K. Wiesenfeld and F. Moss : Stochastic resonance and the benefits of noise : from ice ages to crayfish and SQUIDS, *Nature*, 373 (1995), 33 ; F. Moss and K. Wiesenfeld : 役に立つノイズ, *日経サイエンス*, 25 (1995), 126.
- 6) M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein and N.G. Stocks : Stochastic resonance in perspective, *Nuovo Cimento*, 17 (1995), 661.
- 7) L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni : Stochastic resonance, *Rev. Mod. Phys.*, 70 (1998), 223.
- 8) K. Wiesenfeld : Minireview of stochastic resonance, *Chaos*, 8 (1998), 539.
- 9) K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames and F. Moss : Stochastic resonance on a circle, *Phys. Rev. Lett.*, 72 (1994), 2125.
- 10) D.F. Russell, L.A. Wilkens and F. Moss : Use of behavioural stochastic resonance by paddle fish for feeding, *Nature*, 402 (1999), 291.
- 11) K.A. Richardson, T.T. Imhoff, P. Grigg and J.J. Collins : Using electrical noise to enhance the ability of humans to detect subthreshold mechanical cutaneous stimuli, *Chaos*, (1998), 599.
- 12) H.A. Kramers : Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reaction, *Physica*, 7 (1940), 284.
- 13) B. McNamara and K. Wiesenfeld : Theory of stochastic resonance, *Phys. Rev. A*, 39 (1989), 4854.
- 14) F. Chapeau-Blondeau : Noise-aided nonlinear Bayesian estimation, *Phys. Rev. E*, 66 (2002), 032101.
- 15) 高橋尚太郎 : ベイズ推定におけるノイズの有効性, 卒業論文, 東京大学工学部計数工学科, (2003)

(2004年3月9日受付)