



# 入門講座

電磁力利用の材料プロセッシングと環境技術-1

## 材料電磁プロセスにおける電磁気力 Electromagnetic Force in Materials Processing

岩井一彦  
Kazuhiko Iwai

名古屋大学 大学院工学研究科  
マテリアル理工学専攻 助教授

### 1 導体中の電磁場

アンペールの法則で変位電流の項 ( $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ) を無視できる  
ときを準静的磁界系、あるいはMHD (Magnetohydrodynamics) 近似と呼ぶ。溶鋼のような導体に対して通常この  
近似が成立する。このときのMaxwellの方程式を以下に示  
す。

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} \dots\dots\dots (1-1)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \dots\dots\dots (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \dots\dots\dots (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \dots\dots\dots (1-4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \dots\dots\dots (1-5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \dots\dots\dots (1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \dots\dots\dots (1-7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \sigma \left( -\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \dots\dots (1-8)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \dots\dots\dots (1-9)$$

アンペール (Ampere) の法則 ((1-1) 式) は左辺が原因、  
右辺が結果を表す。すなわち、電流 ( $\mathbf{J}$ ) (左辺) には、磁場  
( $\mathbf{H}$ ) が伴う (右辺) ことを示している。右辺のベクトル記号、  
 $\nabla \times$  は電流の向きと磁場の向きを関係づける。この関係は右  
手を Fig.1 の格好にすれば、わかりやすい。親指が電流の向  
きであれば (①) 磁場は人差し指の向きとなり (②)、人差し  
指 (小指) の向きに電流が流れていれば (①) 磁場は親指の向  
きとなる (②)。

ファラデー (Faraday) の法則 ((1-2) 式) も左辺が原因、  
右辺が結果を表す。すなわち、磁束密度の時間変化を打ち消  
すように電場が形成されることを示す。先程と同様、右辺の

ベクトル記号、 $\nabla \times$  は磁束密度の時間変化の向きと電場の向  
きの関係を表す (Fig.2 参照)。コイル電流増加などにより  
(①) 親指の向きに磁束密度が増加すれば (②) 電場が人差  
し指 (小指) とは逆向き (マイナス符号がついていることに  
注意) に誘導される (②)。人差し指の向きに磁束密度が増加  
すれば (①) 親指とは反対向きに電場が誘導される (②)。導  
体中に電場が誘導されれば、オームの法則に従い電流が流れ  
ることになる。

(1-3) 式は電束密度に関するガウスの法則である。電束線  
の始点、終点には電荷が存在することを示している。

(1-4) 式は磁束密度に関するガウスの法則である。磁束線  
には始点、終点がないことを表している。

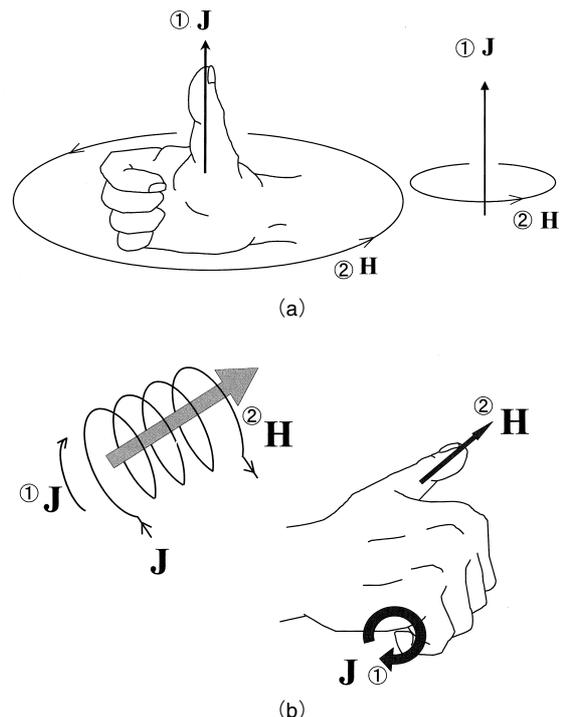


Fig.1 Relation between J and H in Ampere's law

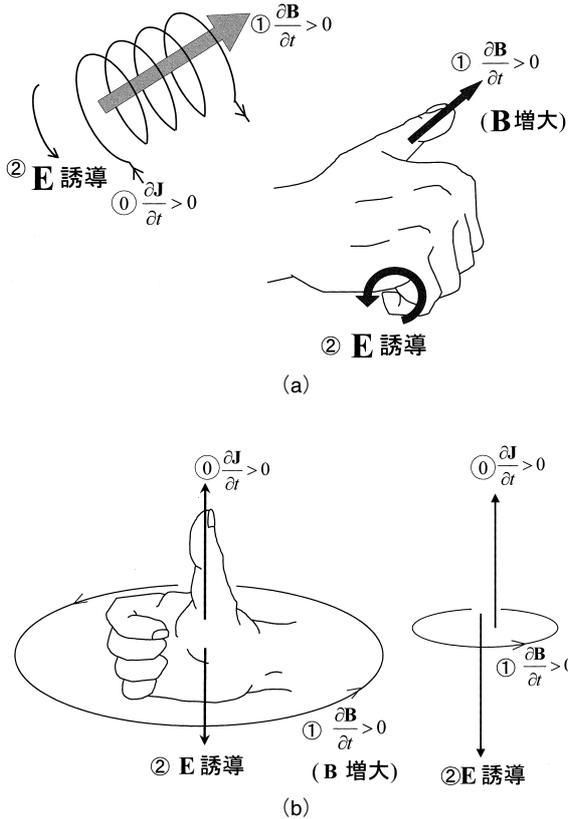


Fig.2 Relation between B and E in Faraday's law

(1-5) 式、(1-6) 式は構成方程式である。ここで、 $\mu$ 、 $\epsilon$  はそれぞれ透磁率、誘電率である。

電流保存則 ((1-7) 式) は (1-1) 式の発散をとることにより導出される。

(1-8) 式はオームの法則である。電流源は、電位勾配 ( $-\nabla\phi$ )、磁束密度の時間変化 ( $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ )、磁場中の運動 ( $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) のいずれかであり、電流の大きさは電気伝導度に比例することがわかる。このうち、最初の一つを除いて非接触で導体中に電流が発生することに注意したい。また、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルと呼ばれるものであり磁束密度  $\mathbf{B}$  とは (1-9) 式で関係づけられる。

電磁場中の物体に加わる単位体積あたりの力、 $\mathbf{F}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \dots \dots \dots (1-10)$$

右辺第1項はクーロン力、第2項はローレンツ力である。通常、導体にクーロン力は作用しない。静磁場中を溶銅などの導体が運動する場合の力は次式で与えられる。

$$\mathbf{F} = \sigma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \dots \dots \dots (1-11)$$

## 2 導体中の磁場分布とシールドイングパラメータ、磁気レイノルズ数

(1-1), (1-2), (1-4), (1-8) 式より導体中の磁束密度に関する支配方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \dots \dots \dots (2-1)$$

ここで右辺第1項は磁場の拡散項であり、第2項は磁場に関する対流項である。

シールドイングパラメータ、 $R_\omega$  は非定常項と拡散項の大きさ比である。

$$R_\omega = \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|}{\left| \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} \right|} = \frac{\omega B}{\frac{1}{\sigma \mu} \frac{B}{L^2}} = \sigma \mu \omega L^2 \dots \dots \dots (2-2)$$

別の見方をしてみる。(2-1) 式で対流項を無視可能 ( $\mathbf{v} = 0$ ) として、磁場が距離  $L$  だけ拡散するのに必要な時間、 $T_D$  を計算する。

$$\frac{B}{T_D} = \frac{1}{\sigma \mu} \frac{B}{L^2} \dots \dots \dots (2-3)$$

となるので、拡散時間は

$$T_D = \sigma \mu L^2 \dots \dots \dots (2-4)$$

一方、5.1 節で示すように角周波数  $\omega$  の磁場の拡散距離は  $\delta = \sqrt{2/\sigma \mu \omega}$  で与えられるので、

$$R_\omega = \frac{T_D}{1/\omega} = \sigma \mu \omega L^2 = \frac{2L^2}{2/\sigma \mu \omega} = 2 \cdot \frac{L^2}{\delta^2} \dots \dots \dots (2-5)$$

つまり、シールドイングパラメータは角周波数  $\omega$  の交流磁場の代表時間、 $1/\omega$  に対して、距離  $L$  を磁場拡散するのに必要な時間の比、あるいは角周波数  $\omega$  の交流磁場が拡散可能な距離、 $\delta$  に対する、代表長さ  $L$  の比 (の2乗) という解釈もできる。シールドイングパラメータが小さければ磁場は距離  $L$  まで浸透するが、大きくなると磁場は減衰して浸透しにくくなる。

磁気レイノルズ数、 $R_m$  は拡散項に対する対流項の大きさ比である。

$$R_m = \frac{\left| \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right|}{\left| \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} \right|} = \frac{\frac{VB}{L}}{\frac{1}{\sigma \mu} \frac{B}{L^2}} = \sigma \mu VL \dots \dots \dots (2-6)$$

対流項の代表時間、代表長さをそれぞれ  $T_c$ 、 $L_c$  とすれば、

$$\frac{B}{T_c} = \frac{1}{L_c} VB \dots \dots \dots (2-7)$$

より

$$T_c = \frac{L_c}{V} \dots\dots\dots(2-8)$$

従って、対流項の代表時間に対する拡散項の代表時間の比は

$$\frac{T_D}{T_c} = \frac{\sigma \mu L_D^2}{L_c/V} = \sigma \mu V L_c \cdot \frac{L_D^2}{L_c^2} = R_m \frac{L_D^2}{L_c^2} \dots\dots\dots(2-9)$$

となる。対流項の代表長さ  $L_c$  と拡散項の代表長さ  $L_D$  を等しいものとすれば磁気レイノルズ数は対流項の代表時間に対する拡散項の代表時間の比となる。

液体金属の電気伝導度 ( $\sigma \approx 10^6 \text{S/m}$ )、透磁率 ( $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ ) の積は1程度の大きさなので、代表速度と代表長さの積が1以下では対流項に比べて拡散項が大きくなる。

$$R_m = \sigma \mu V L \approx 10^6 \cdot 10^{-6} V L \approx V L \leq 1 \dots\dots\dots(2-10)$$

多くの磁場を利用した金属生産プロセスはこの条件を満足する。この場合、(2-1) 式は拡散方程式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} \dots\dots\dots(2-11)$$

このとき、磁場は流動の影響を受けないので運動方程式と磁場の拡散方程式の分離が可能となる。

### 3 磁場分布に対流項が与える効果

長さ  $L$  で単位長さの奥行きを有する一対の完全導体電極にはさまれた導体 (電気伝導度  $\sigma$ 、透磁率  $\mu$ ) に  $I$  (A/m) の電流を上から下へ流す。但し、電極間の導体は一定速度  $V$  で  $x$  方向へ運動している (Fig.3 参照)。このときの磁場分布、電流分布を考える。端効果を無視して磁場は  $y$  方向成分のみ、電流は  $z$  方向成分のみであり、さらに磁場と電流のいずれも  $y$  方向、 $z$  方向に均一で  $x$  のみの関数だとすれば以下の式が成立する。

$$\mathbf{B} = (0, B(x), 0) \dots\dots\dots(3-1)$$

$$\mathbf{v} = (V, 0, 0) \dots\dots\dots(3-2)$$

$$\mathbf{J} = (0, 0, J(x)) \dots\dots\dots(3-3)$$

磁場の支配方程式は (2-1) 式を定常状態とした次式である。

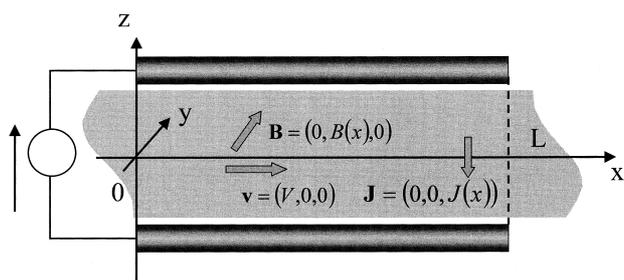


Fig.3 Analytical system

$$\frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \dots\dots\dots(3-4)$$

すなわち、

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - \sigma \mu V \frac{dB}{dx} = 0 \dots\dots\dots(3-5)$$

電極の両端では以下の条件が成立する。

$$B = \mu I \text{ at } x=0 \dots\dots\dots(3-6)$$

$$B = 0 \text{ at } x=L \dots\dots\dots(3-7)$$

ゆえに  $V \neq 0$  のときの磁場分布は

$$B = \mu I \frac{\exp\left(R_m \cdot \frac{x}{L}\right) - \exp(R_m)}{1 - \exp(R_m)} \dots\dots\dots(3-8)$$

一方、電流分布は

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} \dots\dots\dots(3-9)$$

$$= \frac{I}{L} R_m \frac{\exp\left(R_m \cdot \frac{x}{L}\right)}{1 - \exp(R_m)} \mathbf{i}_z \dots\dots\dots(3-10)$$

となる。

磁気レイノルズ数が0、1、10の場合の磁場分布、電流分布を Fig.4、Fig.5 に示す。磁気レイノルズ数が0のとき、磁場は直線分布、電流は均一分布であるが、磁気レイノルズ数が大きくなると導体運動により磁場が下流側へ引きずられ、電流は主として下流側で流れる。電磁場分布は、 $R_m \gg 1$  のときに流動に大きく影響され、 $R_m \ll 1$  では流動にあまり影響されないことがわかる。特に  $R_m \rightarrow \infty$  では磁束線が流体粒子に張り付いたのごとく振る舞い、流体粒子の動きと磁束線の動きが一致する。このような現象を磁気凍結と呼ぶ。

電極を通して奥行き方向単位長さ当たりに流れる全電流は

$$\int_0^L J dx = -I \dots\dots\dots(3-11)$$

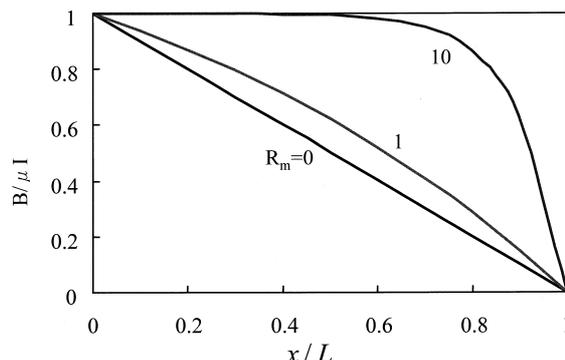


Fig.4 Distribution of magnetic flux density

となり、磁気レイノルズ数によらず常に-z方向へIだけ流れる。

但し、本解析は導体が均一速度で移動する系を対象としており、流体のときに必ずしもこの結果は使えないことに注意を要する。

## 4 流体運動による誘導磁場の大きさ

導電性流体へ磁場印加する。磁場の時間変化は極めてゆっくりで近似的に静磁場と見なすことが出来 ( $R_\omega \ll 1$ )、また、流体運動による磁場変化は小さいものとする ( $R_m \ll 1$ )。

(2-1) 式を次式によって無次元化する。

$$\mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \quad t^* = \omega t, \quad \nabla^* = L \nabla, \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{V} \quad \dots (4-1)$$

$$R_\omega \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*} = \nabla^{*2} \mathbf{B}^* + R_m \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}^*) \quad \dots (4-2)$$

流体運動によって磁場強度が  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_0^* + \mathbf{b}^*$  に変化したとする。 $R_m \ll 1$  なので  $|\mathbf{b}^*| \ll |\mathbf{B}_0^*| = 1$  である。このとき、次式が成立する。

$$R_\omega \left( \frac{\partial \mathbf{B}_0^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \mathbf{b}^*}{\partial t^*} \right) = \nabla^{*2} (\mathbf{B}_0^* + \mathbf{b}^*) + R_m \nabla^* \times \{ \mathbf{v}^* \times (\mathbf{B}_0^* + \mathbf{b}^*) \} \quad \dots (4-3)$$

$R_\omega \ll R_m$  であれば、0次、1次の項はそれぞれ、

$$\nabla^{*2} \mathbf{B}_0^* \approx 0 \quad \dots (4-4)$$

$$\nabla^{*2} \mathbf{b}^* + R_m \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_0^*) \approx 0 \quad \dots (4-5)$$

となる。(4-5) 式で  $\mathbf{b}^*$ 、 $R_m$  以外は  $O(1)$  の大きさであることから、 $R_\omega \ll R_m \ll 1$  なる条件下では誘導磁場の大きさは以下の式で推定可能である。

$$|\mathbf{b}| \approx R_m |\mathbf{B}_0| \quad \dots (4-6)$$

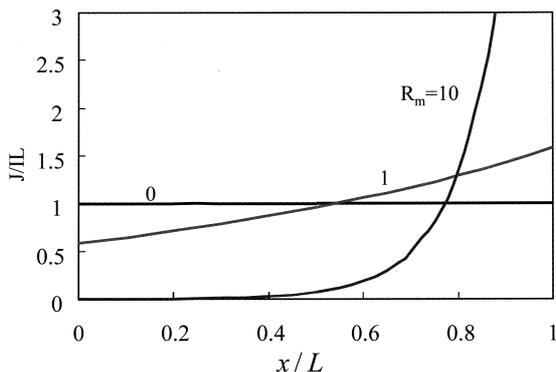


Fig.5 Distribution of electric current

## 5 交流磁場の拡散

### 5.1 1次元モデル

半無限 ( $x > 0$ ) に広がった導体 (電気伝導度  $\sigma$ 、透磁率  $\mu$ ) の表面に角周波数  $\omega$  の交流磁場 (振幅  $B_0$ ) を印加する。導体内の電流、磁場は時間、 $t$  と位置、 $x$  のみの関数とする。磁場は  $z$  成分のみなので電流は  $y$  成分のみ、従って電磁気力は  $x$  成分のみとなる。

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z) \quad \dots (5-1)$$

$$\mathbf{J} = (0, J_y, 0) \quad \dots (5-2)$$

$$\mathbf{F} = (F_x, 0, 0) \quad \dots (5-3)$$

導体は静止しているので支配方程式と境界条件は以下の式で与えられる。

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \quad \dots (5-4)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{i}_z \cos \omega t \quad \text{at } x=0 \quad \dots (5-5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{at } x=\infty \quad \dots (5-6)$$

よって導体内の磁場分布、電流分布、電磁気力分布は以下の式で表される。

$$B_z = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \quad \dots (5-7)$$

$$J_y = \frac{B_0}{\sqrt{2} \delta \mu} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \dots (5-8)$$

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{B_0^2}{\delta \mu} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\left(-\frac{2x}{\delta} + 2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \dots (5-9)$$

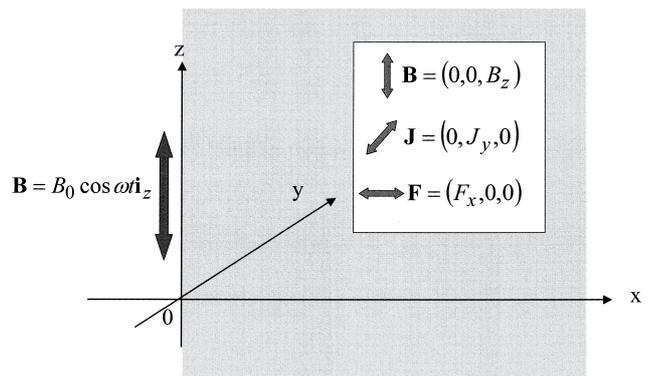


Fig.6 One dimensional model

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \dots\dots\dots (5-10)$$

磁場、電流は導体内で振動しつつ指数関数的に減衰する (Fig.7参照)。磁場振幅が表面の1/e (約37%) になる距離、 $\delta$  は電磁浸透厚みと呼ばれ、電磁場は表面から電磁浸透厚み程度の深さまで浸透するものと見なすことが出来る。これは、(2-4) 式で拡散時間 $T_D$ を $2/\omega$ としたときに等しい。電磁浸透厚み、 $\delta$  は周波数が高いほど薄くなる。すなわち、高周波磁場ほど導体内部への浸透距離が減少する。溶鋼の電磁浸透厚みは、1Hzで0.59 m、10Hzで0.19 m、100Hzで59 mm、1kHzで19 mmとなる。磁場浸透方向の材料長さをLとして計算したシールドイングパラメータが1より十分大きければ、材料を半無限と見なすことが出来、ここで述べた解析解を用いることができる。

電磁気力、 $F_x$ も指数関数的に減衰するものの、1/eになる距離は電磁場の半分の距離である。また、時間依存せず常に導体を圧縮する力 ( $F_{ave}$ ) と印加磁場の2倍の周波数で向きが変化する力 ( $F_{var}$ ) に分けることができる。後者の絶対値は前者より大きいため、両者を合わせた力の向きは時間変化し、一周期の1/4は導体を引っ張るようなxの負の向き、残りの3/4は導体を圧縮するxの正の向きとなる。後者 ( $F_{var}$ ) の時間平均は零となる一方、前者 ( $F_{ave}$ ) を表面から無限遠まで積分することにより電磁気圧が得られる。

$$P_m = \frac{B_0^2}{4\mu} \dots\dots\dots (5-11)$$

電磁気圧は周波数に依存せず、磁場強度の2乗に比例する。この電磁気圧を利用するプロセスに軟接触鋳造やコールド・クルーシブルが挙げられる。単位表面積あたりの発熱速度、 $q$ は磁場強度の2乗に比例し、周波数の平方根に比例する。

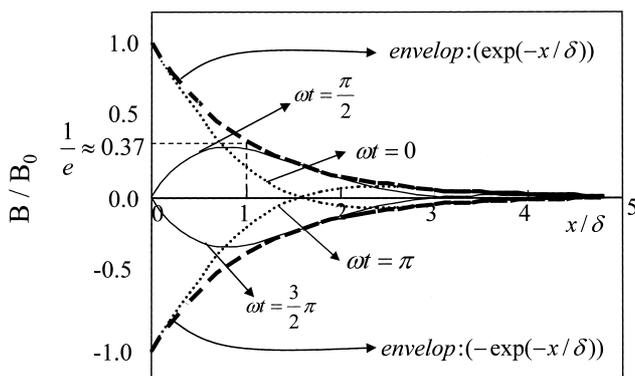


Fig.7 Distribution of magnetic flux density

$$q = \sqrt{\frac{\omega}{8\mu^3\sigma}} B_0^2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} P_m \dots\dots\dots (5-12)$$

### 5.2 円柱モデル

無限に長い円筒 (電気伝導度  $\sigma$ 、透磁率  $\mu$ 、半径  $R$ ) の表面に軸方向成分を有する角周波数  $\omega$  の磁束密度を印加する (Fig.8)。このとき半径方向の電磁気力が作用するが、それは時間に依存せず常に内向きの力 ( $F_{ave}$ ) と印加磁場の2倍の周波数で向きを変化させる力 ( $F_{var}$ ) に分けることができる。前者を円筒表面から中心軸まで積分することにより円筒に加わる電磁気圧が得られる。

$$\mathbf{F} = (F_r, 0, 0) \dots\dots\dots (5-13)$$

$$F_r = F_{ave}(r) + F_{var}(r, t) \dots\dots\dots (5-14)$$

$$P_m = \frac{B_0^2}{4\mu} \left( 1 - \frac{1}{ber_0^2 R_\omega^{1/2} + bei_0^2 R_\omega^{1/2}} \right) \dots\dots\dots (5-15)$$

$$R_\omega = \sigma\mu\omega R^2 \dots\dots\dots (5-16)$$

ここで、 $ber_i$ 、 $bei_i$  は  $i$  次のケルビン関数であり、 $R_\omega$  は円筒半径、 $R$  を代表長さとしたシールドイングパラメータである。電磁気圧はシールドイングパラメータが20、あるいは30付近までは徐々に増加し、それ以上でほぼ一定となる (Fig.9参照)。

軸方向単位長さあたりの発熱速度、 $Q$  (W/m) は以下の通りである。

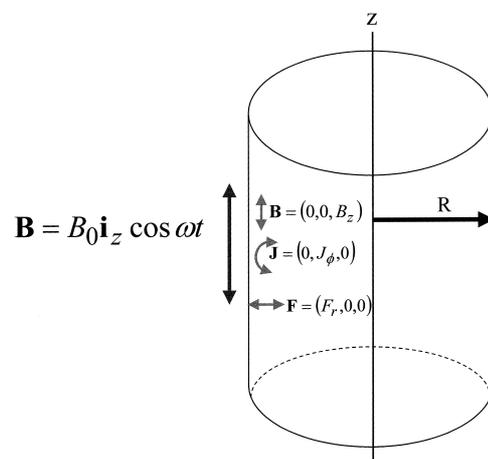


Fig 8 Cylindrical model

$$Q = \frac{2\sqrt{2}\pi B_0^2 R \omega^{1/2}}{\sigma \mu^2} \cdot \frac{\text{ber}_0(R\omega^{1/2})\{\text{ber}_1(R\omega^{1/2}) + \text{bei}_1(R\omega^{1/2})\} - \text{bei}_0(R\omega^{1/2})\{\text{ber}_1(R\omega^{1/2}) - \text{bei}_1(R\omega^{1/2})\}}{\text{ber}_0^2(R\omega^{1/2}) + \text{bei}_0^2(R\omega^{1/2})} \dots (5-17)$$

発熱速度は常に磁場強度の2乗に比例する。発熱速度の周波数依存性は電磁浸透厚み、 $\delta$ と円筒半径、 $R$ の比、 $\delta/R = 0.7$ 付近を境界として異なり、それ以下の周波数では2乗に、それ以上の周波数では平方根に比例する (Fig.10参照)。

印加磁場が低周波数のとき ( $R\omega \ll 1$ ) には円筒内部まで磁場は浸透し、 $F_{ave} \ll F_{var}$ となる。従って、円筒に加わる電磁気圧は小さく、円筒全体に振動力が作用することとなる。また、軸方向単位長さ当たりの発熱速度は周波数の2乗に比例する。

$$F_r \approx F_{ave} + F_{var} = \frac{B_0^2 \sigma \omega r}{4} \cos\left(2\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) \dots (5-18)$$

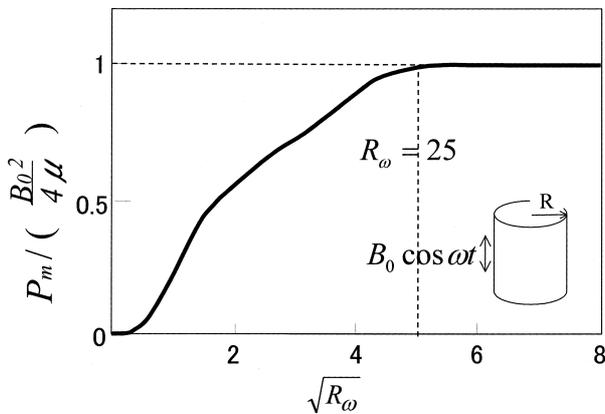


Fig.9 Electromagnetic pressure acting on a cylindrical conductor

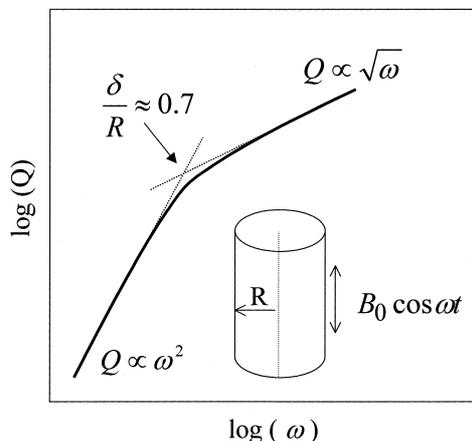


Fig.10 Heat generation rate in cylindrical conductor

$$P_m \approx \frac{B_0^2}{64\mu} R \omega^2 \dots (5-19)$$

$$Q \approx \frac{\pi}{16} B_0^2 \sigma R^4 \omega^2 \dots (5-20)$$

印加磁場が高周波数のとき ( $R\omega \gg 1$ ) には、表面から電磁浸透厚み程度内部での距離で電磁場は減衰するので中心近傍には電磁気力は働かず、5.1節の一次元モデル近似が成立する。また、軸方向単位長さ当たりの発熱速度は周波数の平方根に比例する。

$$P_m \approx \frac{B_0^2}{4\mu} \dots (5-21)$$

$$Q \approx B_0^2 \pi R \sqrt{\frac{\omega}{2\mu^3 \sigma}} \dots (5-22)$$

ここで得られた発熱速度を単位面積あたりに換算すると (5-12) 式と一致する。

## 6 磁場分布と流動

流動は電磁気圧の不均一分布に起因する (Fig.11)。すなわち、容器内に入れられた溶湯表面の磁場が強いところで内部へ向かい、磁場が弱いところでは内部から外側へ向かう循環流が形成される。電磁気圧を大きくするためにはシールドイングパラメータが1より十分大きい ( $R\omega \gg 1$ 、すなわち高周波) ことが望ましい。この条件下 ( $R\omega \gg 1$ ) で容器中心軸付近の速度は以下の式で推定される。

$$V_c \approx \frac{B_0}{R} \sqrt{\frac{h}{\rho}} \frac{1}{(8\mu^3 \sigma \omega)^{1/4}} \propto R\omega^{-1/4} \dots (6-1)$$

ここで、 $h$ は容器高さである。この式から、周波数が高くなると流速は減少することがわかる。

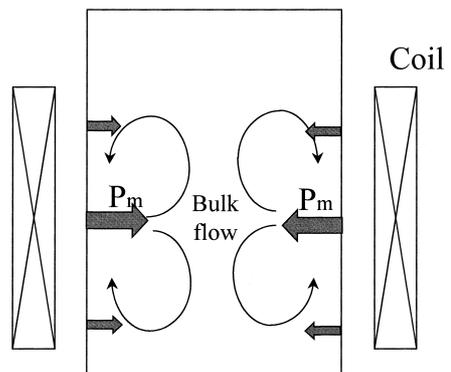


Fig.11 Fluid flow caused by electromagnetic field

## 7 移動磁場

移動磁場はその名の通り、磁場が移動していくものである。交流磁場、移動磁場の両者とも磁場は周期的に変化するが、交流磁場は磁場強度が最大、あるいは零となる時刻が位置によらず同一であるのに対して、移動磁場は磁場強度が最大、あるいは零となる時刻が位置により異なる。

z方向に半無限の長さ(z>0)を有する電気伝導度σ、透磁率μの導体がx方向に一定速度Vで移動しており、その直下で(7-2)式で与えられる面電流をy方向に流す(Fig.12)。

$$\mathbf{v} = (V, 0, 0) \dots\dots\dots (7-1)$$

$$\mathbf{K} = K_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{i}_y = \text{Re} [K_0 e^{j(\omega t - kx)}] \mathbf{i}_y \dots\dots\dots (7-2)$$

導体内には誘導電流(すなわち誘導磁場)と共に電磁気力が作用する。導体内磁場は印加面電流と同じくx方向、時間のいずれに対しても正弦的分布をすると仮定すれば次式が得られる。

$$\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z) = \text{Re} [(\hat{B}_x(z) \mathbf{i}_x + \hat{B}_z(z) \mathbf{i}_z) e^{j(\omega t - kx)}] \dots (7-3)$$

磁束密度に関するガウスの法則より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (7-4)$$

面電流直下に透磁率が無限大の物質があるとすれば以下の境界条件が成立する。

$$B_x|_{z=0} = \mu K_0 \cos(\omega t - kx) \dots\dots\dots (7-5)$$

この境界条件と(7-1)、(7-3)、(7-4)、(2-1)式から磁場分布が計算できる。更にアンペールの法則を用いて求められる誘導電流と磁場の積から電磁気力が得られる。今回の場合、電磁気力はx方向とz方向に生じる。

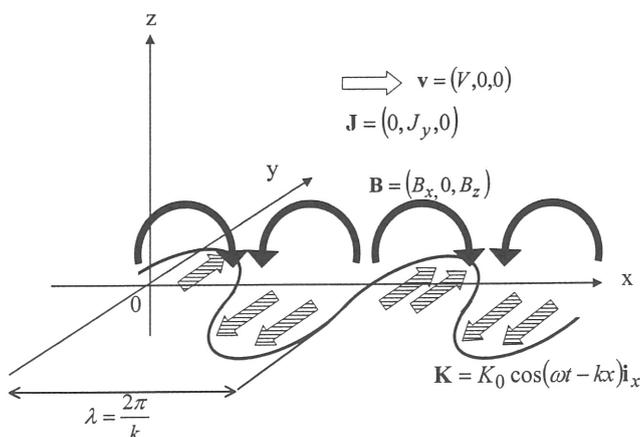


Fig.12 Model of traveling magnetic field

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = (F_x, 0, F_z) \dots\dots\dots (7-6)$$

これをz=0から無限大まで積分し、時間平均した値をFig.13に示す。ここで縦軸は面電流密度で無次元化した単位表面積あたりの電磁気力である。横軸のSは次式で定義されるすべりである。

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^\infty \mathbf{F} dz dt \dots\dots\dots (7-7)$$

$$\mathbf{f}^* = \frac{\hat{\mathbf{f}}}{\frac{1}{4} \mu K_0^2} = \frac{4}{\mu K_0^2} (f_x^*, 0, f_z^*) \dots\dots\dots (7-8)$$

$$S = \frac{\mu\sigma}{k^2} (\omega - kV) = \frac{\mu\sigma/k^2}{(1/k)/(\omega/k - V)} \dots\dots\dots (7-9)$$

導体と共に移動する観測者からみて磁場が距離1/kだけ移動する時間は(1/k)/(ω/k-V)となる一方、(2-4)式より距離1/k程度の磁場拡散時間はμσ/k<sup>2</sup>となるので、すべりSはその比と解釈できる。剪断力f<sub>x</sub><sup>\*</sup>はすべりが約1.74のときに最大となるので、移動磁場を導体の搬送に利用したいときはその付近のSが良いことが推察される。一方、圧縮力f<sub>z</sub><sup>\*</sup>はすべりと共に単純増加し、S=2.85を越えると剪断力より大きくなるので導体の浮揚には大きなSが良い。

導体内部の磁場、誘導電流の実効値は共に面z=0から内部に向かって指数関数的に減衰する。

$$\mathbf{B} \propto e^{-z/\alpha}, \mathbf{J} \propto e^{-z/\alpha} \dots\dots\dots (7-10)$$

この電磁浸透厚み、αをすべり、Sの関数としてFig.14に示す。但し、縦軸は波数kで無次元化してある。印加面電流密

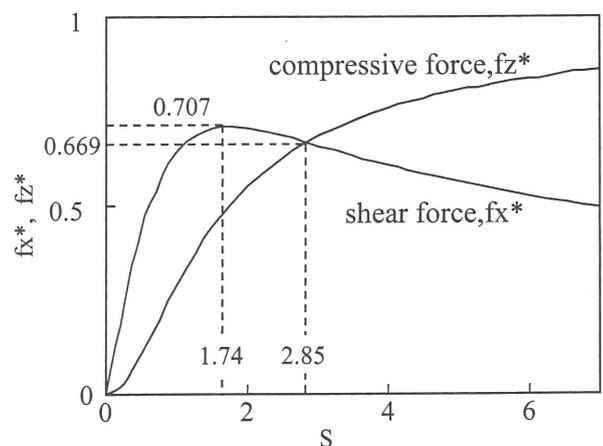


Fig.13 Induced force by traveling magnetic field

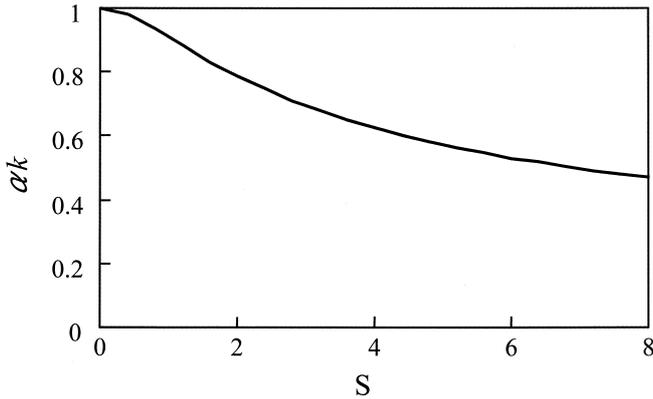


Fig.14 Electromagnetic skin layer in the case of traveling magnetic field

度の位相速度 ( $\omega/k$ ) と導体の移動速度が同一の場合は  $S=0$  となるので、導体と共に移動する観測者からみて磁場の時間変化がなく、誘導電流は生じない。このとき電磁浸透厚みが最も大きく  $1/k$  となる。Sの増加に伴い電磁浸透厚みは減少する。すなわち、運動によっても導体内へ磁場は浸透しにくくなる。

## 8 運動方程式

ナビエ - ストークスの式を以下に示す。

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad \dots\dots (8-1)$$

ここで、 $\eta$  は粘性係数を表す。  
流体に静磁場が印加されていれば、外力  $\mathbf{F}$  は (1-11) 式の通りとなる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad \dots\dots (1-11)$$

ナビエ-ストークスの式を (8-2) 式によって無次元化することにより、電磁流体力学で取り扱う重要な無次元数が現れる。

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{p}{\rho V^2}, \quad \mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{F}}{F_0}, \quad F_0 = \sigma V B_0^2, \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{V} \quad \dots (8-2) \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \text{Re} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \\ &= \text{Re} \nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + Ha^2 \mathbf{F}^* \quad \dots\dots (8-3) \end{aligned}$$

レイノルズ数は  $\text{Re}$  は慣性項と粘性項の比であり、流れが層流であるか乱流であるかの指標となる。

$$\text{Re} = \frac{\text{慣性力項}}{\text{粘性力項}} = \frac{|\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{v}|} = \frac{\rho V L}{\eta} \quad \dots\dots (8-4)$$

ハートマン (Hartmann) 数、 $Ha$  は磁場による外力項と粘性項との比 (の平方根) であり、層流における磁場の影響を与

える指標である。

$$\begin{aligned} Ha^2 &= \frac{\text{電磁気力項}}{\text{粘性力項}} = \frac{|\sigma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{v}|} \\ &= \frac{\sigma V B^2}{\eta \frac{V}{L^2}} = \frac{\sigma}{\eta} B^2 L^2 \quad \dots\dots (8-5) \end{aligned}$$

インターラクショパラメータ (Interaction Parameter)、あるいはスチュワート (Stuart) 数、 $N$  は磁場による外力項と慣性力項の比であり、乱流における磁場の影響を与える指標である。

$$\begin{aligned} N &= \frac{\text{電磁気力項}}{\text{慣性力項}} = \frac{|\sigma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|}{|\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|} \\ &= \frac{\sigma V B^2}{\rho \frac{V^2}{L}} = \frac{B^2 \sigma L}{\rho V} = \frac{Ha^2}{\text{Re}} \quad \dots\dots (8-6) \end{aligned}$$

粘性項と非定常項の比をここでは  $E$  と定義した。

$$E = \frac{\text{粘性項}}{\text{非定常項}} = \frac{|\eta \nabla^2 \mathbf{v}|}{\left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|} = \frac{\eta}{\rho \omega L^2} \quad \dots\dots (8-7)$$

磁場の拡散係数に対する運動量の拡散係数の比を磁気プラントル (Prandtl) 数、 $\text{Pr}_m$  と呼ぶ。

$$\text{Pr}_m = (\eta/\rho)/(1/\mu\sigma) = \eta\mu\sigma/\rho \quad \dots\dots (8-8)$$

通常の液体金属に対して、 $\eta/\rho \approx 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $1/\sigma\mu \approx 1 \text{ m}^2/\text{s}$  程度なので  $\text{Pr}_m \ll 1$  となる。すなわち、速度場境界層より磁場境界層の方が厚い。

## 9 最後に

最後に、以下の文献がこの分野の理解に役立つので是非参考にされたい。

- 1) 浅井滋生：入門材料電磁プロセッシング，内田老鶴圃，東京，(2000)
- 2) 材料電磁プロセッシング，(社)日本鉄鋼協会 材料電磁プロセッシング研究グループ編，東北大学出版会，仙台，(1999)
- 3) 谷口尚司，八木順一郎：材料工学のための移動現象論，東北大学出版会，仙台，(2001)
- 4) 第129・130回西山記念技術講座 電磁気力を利用したマテリアルプロセッシング，(社)日本鉄鋼協会，東京，(1989)
- 5) R. Moreau：Magnetohydrodynamics，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，(1990)
- 6) Herbert H. Woodson and James R. Melcher：Electromechanical Dynamics Part I，Discrete Systems，

- Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, (1985)
- 7) Herbert H. Woodson and James R. Melcher : Electromechanical Dynamics Part II, Forces, and Motion, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, (1985)
- 8) Herbert H. Woodson and James R. Melcher : Electromechanical Dynamics Part III, Elastic and Fluid Media, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, (1985)

## 記号表

- A** [T · m] : ベクトルポテンシャル
- B** [T] : 磁束密度、代表磁束密度
- B** [T] : 磁束密度
- D** [C/m<sup>2</sup>] : 電束密度
- E** [V/m] : 電場
- F** [N/m<sup>3</sup>] : 単位体積当りの力
- f̂** [N/m<sup>2</sup>] : 時間平均された単位表面積当りの力
- H** [A/m] : 磁場
- Ha [-] : ハートマン数
- h [m] : 液深
- I [A/m] : 奥行き方向単位長さ当りの電流
- J [A/m<sup>2</sup>] : 奥行き方向単位長さ当りの電流
- J** [A/m<sup>2</sup>] : 電流密度
- j [-] : 虚数単位
- K** [A/m] : 面電流密度
- K<sub>0</sub> [A/m] : 面電流密度
- L [m] : 長さ、代表長さ
- L<sub>c</sub> [m] : 対流項の代表長さ
- N [-] : インターアクションパラメータ、スチュワート数
- Pm [Pa] : 電磁気圧
- Prm [-] : 磁気プラントル数

- Q [W/m] : 単位長さ当りの発熱速度
- q [W/m<sup>2</sup>] : 単位表面積当りの発熱速度
- Re [-] : レイノルズ数
- Rm [-] : 磁気レイノルズ数
- R<sub>ω</sub> [-] : シールディングパラメータ
- S [-] : すべり
- T<sub>c</sub> [s] : 対流項の代表時間
- T<sub>D</sub> [s] : 拡散項の代表時間
- t [s] : 時間
- V [m/s] : 代表速度
- V<sub>c</sub> [m] : 容器中心軸付近の速度
- v** [m/s] : 速度
- x [m] : 位置
- y [m] : 位置
- z [m] : 位置
- α [m] : 移動磁場の電磁浸透厚み
- δ [m] : 交流磁場の電磁浸透厚み
- η [Pa · s] : 粘性係数
- μ [H/μ] : 導磁率
- ρ [kg/m<sup>3</sup>] : 密度
- ρ<sub>f</sub> [C/m<sup>3</sup>] : 電荷密度
- σ [S/m] : 電気伝導度
- φ [v] : 電位 (スカラーポテンシャル)
- ω [rad/s] : 角周波数

## 上添え字

- \* : 無次元数

## 下添え字

- x : x方向
- y : y方向
- z : z方向

(2004年7月7日受付)