



特集記事 • 10

鉄鋼におけるマルチスケール・マルチフィジックス計算材料科学

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) による粉粒体の運動や堆積の数値シミュレーション

Simulation of Granular Flows and Piles Using
SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)

大岳 R. and D. コンサルタント事務所
所長

湯 晋一
Shinichi Yuu

九州工業大学
大学院工学研究院
教授

梅景俊彦
Toshihiko Umekage

1 はじめに

粉粒体は我々の周りの自然の中に存在するのみならず、種々の工業、農業等の多くの産業の原料、中間生成物、製品として現出し、その力学機構の解明はこれらの画期的な発展を導く基礎として多くの方面から期待されている。Cundall and Struck¹⁾が提案した離散要素法 (Distinct Element Method, 以下DEM) は個々の粒子に対して、多くの仮定がなされているものの粒子の衝突、接触による変形と摩擦を基本として粒子一個一個の運動方程式を計算して、そこに存在する全ての粒子の運動を算出するので、それらの集合体である粉粒体の力学的挙動をほぼ理にかなって予測することが出来る。ただし、粒子一個一個を追跡して計算するために計算できる粒子数に限りがある。並列計算手法でたとえ数億個の粒子の計算が出来たとしても、粒子径が小さくなれば現実の現象の力学場からほど遠い限られたモデル場の計算になってしまう。したがってマクロな現実の力学場の計算にはどこまでも粒子一個一個の計算での制限が存在し、それを乗り越えることは出来ない。それとDEM (粒子一個一個を計算する場合) には粒子一個一個の物理的な関係 (Hookeの法則等) があるだけで、集合体としての粉粒体の物理的な関係は不明で、得られた結果を詳しく解析して初めてその一部が明らかになる程度である。したがって粉粒体のマクロな力学現象を明らかにするためには集合体としての粉粒体の物理的な関係が明らかになっていることが望ましい。大まかに言えば、DEMは通常の流体力学における分子運動モデルによる計算に対応し、マクロな粉粒体の運動の解析は流体力学のNavier・Stokes式による解析に対応する。したがって粉粒体の力学現象を明らかにするためには、流体力学のNavier・Stokes式に相当する

基礎式が必要となる。すなわち粉粒体を連続体化した基礎式である。それに必要なのが粉粒体の構成式 (状態式である応力と嵩密度の関係を含む) である。

流体の個々の分子の運動から分子運動論を用いて流体の構成式であるニュートンの粘性の法則が求められるように、本稿では著者等がDEMを用いて、粉粒体を構成する個々の粒子の力学関係から求めた連続体化したマクロな粉粒体の構成式^{2,4)}を用いる。構成式を求める場合、力学場は基本的かつ一般的な場でのよいので、その計算に膨大な粒子個数は必ずしも必要でない。1万程度で事足りる。著者等が求めた構成式は約1万個の粒子から求めている。これで粉粒体の支配方程式は閉じたわけであるから、すなわち粉粒体の力学関係の未知数と方程式の数が一致したので、あとは基礎式を解けばよいことになる。通常支配方程式は複雑な非線形性を有するので、数値計算で解くことになる。粉粒体の流動、その結果として起こる堆積またそれからの崩壊等の計算にSPHを用いることが出来る。SPHは、天体物理学や流体力学における連続体を取り扱ったシミュレーションに用いられている数値解析法⁵⁾であり、計算方法はラグランジュ法である。ただしDEMのように個々の粒子に着目するのではなく、粒子群で形成され重なりあって存在する連続体素片 (仮想粒子、Imaginary Particle, IP) に着目し、その個々の素片に対して運動方程式を計算する方法である。したがって個数の問題は解決され、かつラグランジアン的に取り扱うので離散的要素が起因する諸性質を表現することも可能である。また粒子軌跡を計算するので、大変形歪の計算が容易であり、自由表面は近似的ではあるが自動的に求まる。欠点と言えばオイラー的方法 (有限要素法等) に比較して精度が落ちるのが欠点であろう。Fig.1に粉粒体の現象を検討する我々の手法の概略を示す。

以下に計算方法を説明し、角型ホッパーからの粉粒体の流出と堆積および粉粒体がオリフィスから流出して平板上に堆積した時の平板上に作用する応力分布をSPHで計算し、それぞれの実験値と比較してSPHの有用性を検討する。

2 計算方法

力学場の数値解析には大きく分けて、場に固定された点において随時計算を行っていくオイラー的方法と場と共に移動する座標において随時計算を行っていくラグランジュ的方法がある。SPHは場を連続体としてラグランジュ的に計算する方法である。SPHは連続体と近似した計算対象を仮想粒子 (IP, 素片) に分割して、その粒子の運動、すなわち仮想粒子の軌跡を追跡する手法である。各粒子は、互いに重なりあってその集合体によって、例えば粉粒体を表す。仮想粒子のもつ物理量は粒子の中心における値として表わされ、その点と共に移動する。仮想粒子の物理量は連続体内に分布関数 w (Kernel function) によって分布し、その分布内に存在する他の仮想粒子と相互に影響を及ぼしあい、連続体の力学状態を表す。したがって連続体中の仮想粒子の物理量 $\langle f(x_i) \rangle$ はそれ自身をも含めて、全ての仮想粒子の分布関数の重なりあいの総和として、すなわち積分することによって求まる。周囲の仮想粒子の分布関数をも含めて前述の事柄を図にすると Fig.2 (a) のようになり、Eq. (1) のようになる。Figs.2 (a), (b) にある丸または点は仮想粒子の中心を示す。以下変数の

ゴシック体はベクトル量を示す。

$$\langle f(x_i) \rangle = \int w(x_i - x_j) f(x_j) dx_j = \sum_j w(x_i - x_j) f(x_j) \Delta x_j \dots \dots (1)$$

ある着目仮想粒子が他の仮想粒子から影響を受ける影響範囲は理論上では全ての粒子であるが、すなわち Eq. (1) の積分範囲は無限大であるが、数値計算をする場合これは不可能である。実際には限定した影響範囲を設けて数値計算をする。通常は Monaghan⁶⁾ が示した、その点における仮想粒子 i の大きさ h_i の2倍 ($2h_i$) を半径とした球の内部を影響範囲として考えるのが妥当である。影響範囲の概念図を Fig.2 (b) に示す。この値は力学場によっても、また要求される精度によっても変化する。 h_i は Eq. (2) によって表される。

$$h_i = \left\{ \frac{m_0}{\rho_b(x_i)} \right\}^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots (2)$$

m_0 は仮想粒子の質量、 ρ_b は嵩密度、 x_i は位置である。

また物理量の分布関数である Kernel function w はやはり Monaghan⁶⁾ が示したスプライン関数 (次式) が用いられる。

$$w(q, h_i) = \frac{1}{\pi h_i^3} \begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3\right) & [0 < q \leq 1] \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & [1 < q \leq 2] \\ 0 & [q > 2] \end{cases} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{ただし、} q = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{h_i}$$

仮想粒子の存在点によって連続体を表現し、その濃度によって連続体の局所的な密度を表し、それに比例して粒子の影響範囲が決められるので、密度の濃いところは詳しく、薄いところは大きい粒子で粗に表現され、計算も効率的である。

ここでかさ密度 $\rho_b(x_j)$ と1個の仮想粒子の質量 m_0 との関係は次式で表される。

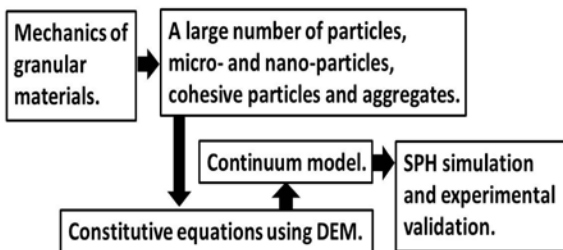


Fig.1 Strategy for mechanics of granular materials.

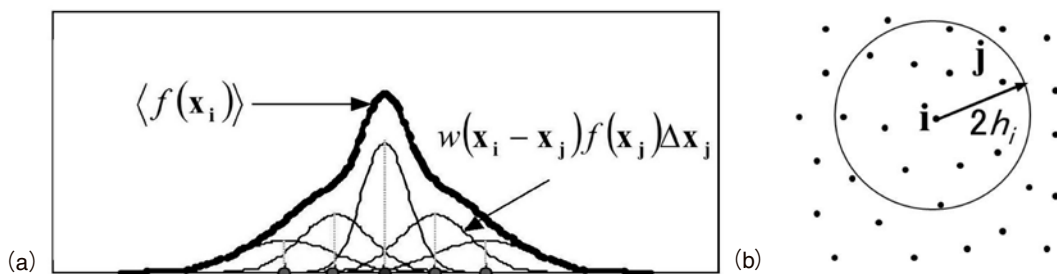


Fig. 2 (a) Distribution of Kernel function, (b) Interaction range.

$$\rho_b(\mathbf{x}_j)\Delta\mathbf{x}_j = m_0 \quad \text{..... (4)}$$

ただし3次元の場合 $\Delta\mathbf{x}_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ である。

したがってEq. (4) をEq. (1) に代入すると、周囲の影響を考慮した、すなわち平滑化された一般の物理量は次のようになる。

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = m_0 \sum_j \left\{ \frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_b(\mathbf{x}_j)} \right\} w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad \text{..... (5)}$$

Eq. (3) にはEq. (1) の $\Delta\mathbf{x}_j$ が $\rho_b(\mathbf{x}_j)$ で表されている。すなわち影響範囲内の全ての仮想粒子についてEq. (5) の各項を計算して、たし合えれば平滑化された物理量が求まる。また物理量の平滑化された一階の微分値は次式で表される。

$$\left\langle \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = m_0 \sum_{j=1} \left\{ \frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_{bj}} \right\} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right] w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad \text{..... (6)}$$

上式から分かるように、平滑化された微分値は分布関数のi点での微分値を足し合わせることによって求まる。したがって微分するのは平滑化関数(分布関数)のみである。

平滑化の例として、平滑化された嵩密度 $\langle \rho_b(\mathbf{x}_i) \rangle$ と速度 $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \rangle$ を示すと次式のように表される。

$$\langle \rho_b(\mathbf{x}_i) \rangle = m_0 \sum_j w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad \text{..... (7)}$$

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \rangle = m_0 \sum_j \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}_j)}{\rho_b(\mathbf{x}_j)} w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad \text{..... (8)}$$

平滑化関数は規格化のため次式を満たさなければならない。

$$\int w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j = 1 \quad \text{..... (9)}$$

以上でSPHの主要な事柄について説明したので、次に実際の粉粒体の流動や堆積のシミュレーションに入って行こう。

粉粒体を連続体化した場合の支配方程式は運動方程式と連続の式である。それらは次式のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \mathbf{u}_p = \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = -\frac{1-\Phi}{\rho_b} (\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ps} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{pd}) + \frac{\mathbf{S}_p}{\rho_b} - \mathbf{g} \quad \text{..... (10)}$$

$$\frac{d\rho_b}{dt} = -\nabla \cdot \rho_b \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \rho_b \quad \text{..... (11)}$$

$\mathbf{u}_p, t, P, \mathbf{g}$ は粉粒体の速度、時間、気流の静圧、重力加速度、 Φ は空隙率、 τ_{ps}, τ_{pd} は歪および歪速度による応力テンソル。Eq. (10) 中の $\mathbf{S}_p$ 項は気流との相互影響を表し、次式となる。

$$\mathbf{S}_p = 3\pi\mu D_p (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) n(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \xi(\Phi) \quad \text{..... (12)}$$

$D_p, Re_p, n, \mathbf{u}$ は現実の粒子の径、レイノルズ数、個数濃度、気流速度。 μ, ξ は気流の粘度、周囲粒子の影響関数である。 $\mathbf{S}_p$ 項中に含まれる粉粒体と相互影響した気流の速度を求めるためには、粉粒体の支配方程式と気流の支配方程式 (Navier-Stokes式と気流の連続の式) を連成して解かなければならない。気流の支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \rho \Phi \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \Phi \mathbf{u} \mathbf{u} = -\Phi \nabla P + \Phi \mu \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] - \mathbf{S}_p \quad \text{..... (13)}$$

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \Phi \mathbf{u} = 0 \quad \text{..... (14)}$$

ρ は気流密度である。気流の支配方程式である Navier-Stokes 式には粉粒体との相互影響項 $\mathbf{S}_p$ はマイナスの符号がついて入っている。これらの方程式を解くためにはEq. (10) 中の応力 (τ_{ps} : 歪により発生する応力、 τ_{pd} : 歪速度により発生する応力) を表す全く別の式が必要である。これが最初に述べた構成式 (状態式を含む) である。前述した著者等が DEM を用いて求めた構成式^{3,4)} を以下に示す。

$$\tau_{ps,xx} = f(\rho_b) \left[A1 E a_{xx} + A2 (E a_{yy} + E a_{zz}) + A3 (E a_{xy} + E a_{xz}) \right] \alpha \quad \text{..... (15)}$$

$$\tau_{ps,yy} = f(\rho_b) \left[A1 E a_{yy} + A2 (E a_{zz} + E a_{xx}) + A3 (E a_{yx} + E a_{yz}) \right] \alpha \quad \text{..... (16)}$$

$$\tau_{ps,zz} = f(\rho_b) \left[A1 E a_{zz} + A2 (E a_{xx} + E a_{yy}) + A3 (E a_{zx} + E a_{zy}) \right] \alpha \quad \text{..... (17)}$$

$$\tau_{ps,xy} = f(\rho_b) \left[A4 E a_{xy} + A5 E a_{xz} + A6 E a_{zy} \right] \tau \quad \text{..... (18)}$$

$$\tau_{ps,yz} = f(\rho_b) \left[A4 E a_{yz} + A5 E a_{yx} + A6 E a_{xz} \right] \tau \quad \text{..... (19)}$$

$$\tau_{ps,zx} = f(\rho_b) \left[A4 E a_{zx} + A5 E a_{zy} + A6 E a_{yx} \right] \tau \quad \text{..... (20)}$$

$$\tau_{ps,yx} = \tau_{ps,xy}, \tau_{ps,zy} = \tau_{ps,yz}, \tau_{ps,xz} = \tau_{ps,zx} \quad \text{..... (21)}$$

$$\tau = \frac{|\tau_{ps,xx} + \tau_{ps,yy} + \tau_{ps,zz}|}{3} \quad \text{..... (22)}$$

$$\tau_{pd,ij} = -B1 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{0.5} \dot{\gamma}_{ij} \tau \quad [i=j \text{ の場合}] \quad (23)$$

$$\tau_{pd,ij} = -B2 \left(\frac{D_p}{g} \right)^{0.5} \dot{\gamma}_{ij} \tau \quad [i \neq j \text{ の場合}] \quad (24)$$

ここで Ea_{ij} は Almansi の歪テンソル、 $f(\rho)$ は状態式で α はスケールリングファクターである。A1–A6 は Almansi の歪テンソルのスカラー値すなわち大きさ $|Ea|$ の非線形関数で、その求め方、実際の関数形等、詳しくは筆者等の文献³⁾を参照いただきたい。また B1 と B2 は計算結果を数式化した時の定数である。これも値等は文献^{3,4)}を参照いただきたい。 $\dot{\gamma}_{ij}$ は歪速度である。連続体化された粉粒体の支配方程式 Eq. (10) の左辺はラグランジアン微分項を表しているので中央の辺でそれに等しくおいている。したがって Eq. (10) の右辺を計算すると Eq. (10) はラグランジアン微分を計算することによって仮想粒子の粒子軌跡を計算することが出来る。計算には Runge-Kutta 法を用いた。またこれと連成し Eq. (11) を計算するので、粒子軌跡にそった粉粒体の嵩密度が求まる。SPH は通常、嵩密度の変化と粉粒体の速度を連成して計算するので圧縮性の連続体の計算である。非圧縮性連続体の場合には密度が一定である条件を満足しながら計算する必要があり、類似の手法であるが、別の計算方法である。これは越塚等の研究⁷⁾が詳しい。

Eq. (10), Eq. (11) の右辺の各項を構成式等にしながら計算し、Eq. (5), Eq. (6) にしながら平滑化して求めた値に基づいてラグランジアン微分を計算すれば粉粒体の仮想粒子の粒子軌跡が求まる。SPH において、Eq. (10) の右辺の応力の微分項の計算において、仮想粒子どうしが急激に接近するような場合、この微分項が非現実的に大きな値となることがあるので、これを防ぐために通常この項に人工粘性の項を加算することが行われる。Monaghan が用いている式がよくつかわれるが、それは Monaghan の論文⁶⁾ (Eq.4.2) を参照されたい。Eq. (10), Eq. (11) はラグランジアン微分の計算であるから、右辺が非線形性の強い関数に基づいていたとしても、時間に関する常微分の計算であるから、計算は難しいものではない。

SPH の計算精度はラグランジアン微分の時間ステップ Δt と仮想粒子の初期サイズ (径) h_0 によって決まる。 Δt は最小限、クーランの条件 (次式) を満足しなければならない。

$$\Delta t < \frac{kl}{s + |\mathbf{u}_p|} \quad (25)$$

上式中の k は定数で、通常 0.3 以下の数字が用いられる。1 は影響範囲で $2h_0$ がよく用いられる。 $\mathbf{u}_p$ は仮想粒子の速度で

s は粉粒体中を伝播する音速である。SPH では粉粒体を圧縮性連続体として取り扱うので、密度変化による圧力変化は音速となり伝わるので、クーラン条件の速度の基準は音速 s となる。 s は次式で求まる。

$$s = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{[\gamma(\rho_{\max} - \rho_0)]^{\frac{1}{2}}}{\rho_{\max} - \rho} \quad (26)$$

ここで γ は 200 kPa 程度の定数である。Gutfraind and Savage⁸⁾ は 190 kPa を用いている。一方、 h_0 は対象となる力学場の変化を十分に表される微小な値として決めればよい。

連成する気流の計算は通常の有限差分法で計算し、Sp 項で粉粒体の支配方程式とリンクすれば連成計算が出来る。

3 角型ホッパーからの粉粒体の流出と堆積

著者等は角型ホッパーからの粉粒体の流出と堆積について詳細な計算 (粉粒体は SPH で計算) を行い、同一条件で実験を行い比較検討した結果を Materials³⁾ に掲載しているが、それと全く同一の計算であるが、Materials に掲載した時間と異なる時間の結果をここに示して、実験と比較検討することによって SPH の有用性を議論したいと思う。

計算領域を Fig.3 に示す。また計算条件を Table 1 に示す。

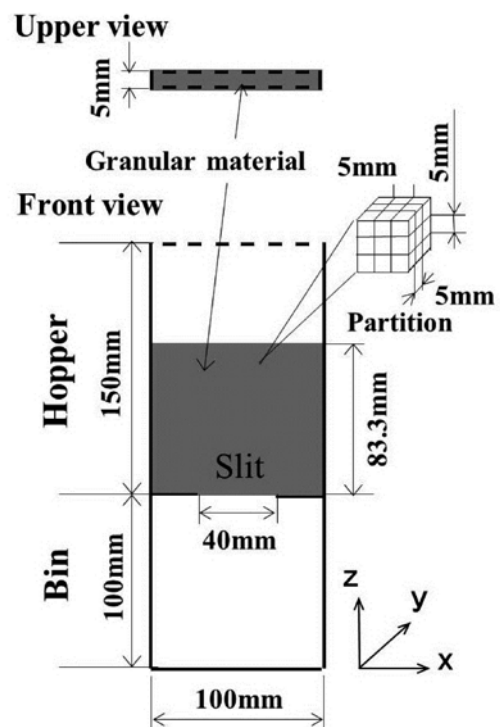


Fig.3 Computational domain and boundary conditions.

Table.1 Computational and experimental conditions of hoppers.

	Computational conditions.	Experimental conditions.
Initial particle bed height	83.3 mm	83.3 mm
Initial packing fraction, ρ_b/ρ_p	0.60	0.60
Imaginary particle mass of SPH, m_θ	6.94×10^{-6} kg	-
Number of imaginary particles of SPH	9,000	-
Initial distance of imaginary particle centers of SPH, h_θ	1.67 mm	-
Particle	Glass bead	Glass bead
Particle diameter, D_p	200 μ m	201 μ m
Standard deviation of D_p	0 μ m	6 μ m
Particle density, ρ_p	2,500 kg/m ³	2,490 kg/m ³
Computational cell sizes of air velocity, $\Delta x = \Delta y = \Delta z$	1.25 mm	-
Number of computational cells of Air velocity, $N_x \times N_y \times N_z$	$80 \times 4 \times 200 = 64,000$	-
Time step, Δt	2.0×10^{-6} s	-

着目i仮想粒子の影響範囲内に存在する仮想粒子jを探しやすくするために着目i仮想粒子iの周りをパーティション（本計算では一辺が5mmの27個の立方体）で区切る。次に境界の表し方だが、境界においては、計算空間外部に1パーティション分余分に計算空間を設ける。そして、計算空間内部の壁に接しているパーティションに存在している仮想粒子（以下粒子と書く）と、壁を境に対称になるように粒子を配置する。例えば、壁が固体壁の場合、粒子の速度は壁に対して垂直となる速度成分について異符号とし、他は同一とする。固体壁の場合、壁で摩擦が働くので、壁における垂直応力とせん断応力比が摩擦係数を超えると、粒子速度は急激にゼロになる条件を付加する。粒子の初期配列としては計算空間内部において、規則的かつ一様に配置する。ホッパーの開口部を閉じた状態で、最初は粒子も気流も全領域で速度はゼロである。その後粒子を沈降させる。粒子の沈降速度は増加しその後減少する。全粒子の沈降速度が100 μ m/s以下になった状態を初期状態とした。この時粒子の充填率は約0.6である。ホッパーの開口部であるスリットを開くと粉粒体は下方に流出し、ホッパー内部に流動が起こる。スリットから流出した粉粒体は貯蔵容器（ビン）の底に到達してその後、堆積する。この様子の空気がある場合と空気がない場合の計算結果を同一条件での実験結果との比較をFig.4に示す。この図で連続体化された粉粒体の流れや堆積を表すために描いた点は各仮想粒子の影響範囲（半径 $2h_i$ の球）内に50点を正規乱数（分散は $(2/3)h_i^2$ ）で分布させて描いた点である。したがって、図中隙間状になっているところは、粉粒体の濃度が他に比べて大幅に低いことを示している。

Fig.4における(a) i図（最左側の図）に気流を考慮した場合（常圧の場合）、すなわち粉粒体の支配方程式（これらを

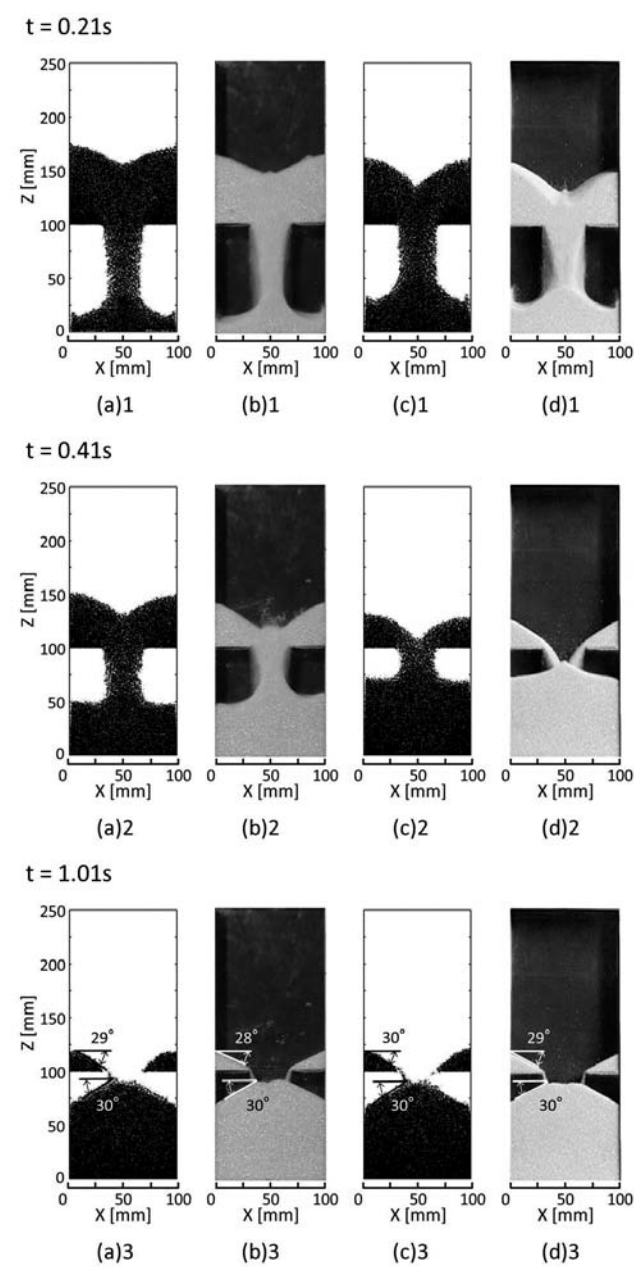


Fig.4 Calculated and experimental snapshots of granular flow in the flat-bottomed hopper and bin: (a) 1, (b) 1, (c) 1 and (d) 1 at $t = 0.21$ s, (a) 2, (b) 2, (c) 2 and (d) 2 at $t = 0.41$ s, (a) 3, (b) 3, (c) 3 and (d) 3 at $t = 1.01$ s.

SPHで解いた）と気流の基礎式（Navier-Stokes式等は有限差分法で解いた）を連成して解いた仮想粒子の各瞬間における粒子位置図を示す。その横の(b) i図（中左側の図）に同一条件で実験した場合の同一瞬間における粒子位置図の実験値を示す。また気流の影響を見るために、(c) i図（中右側の図）に気流がない場合の粒子位置図の計算結果と(d) i図（最右側の図）にそれとほぼ同一条件、気圧が10万分の1気圧でほぼ空気がない状態で実験した場合の粒子位置図の実験値を示す。各時間における計算結果と実験結果を比較すると、細部にわたって計算結果は実験結果をよく表している。例えば、気流の影響を考慮した場合、ホッパーから流出した粉粒体は

少し縮流して下降するが、これは周囲の気流を巻き込むために起こるが、計算結果 ((a) 1図) はこの様子を表現し、実験結果 ((b) 1図) と一致している。気流 (空気) がいない場合の計算結果 ((c) 1図) は縮流が起こらず、実験結果 ((d) 1図) を表現している。下部 (Bin 部) にまだあまり粉粒体が堆積していないときに、Bin 部の底を水平に流れた粉粒体が側壁に当たって側壁に沿って高く堆積するが、この現象も良くとらえている。気流 (例えば常圧) がある場合は空気の抵抗があるため、ホッパー開口部からの粉粒体の流出流量は空気がある場合に比較して小さくなる。これも定量的に実験結果を表現している。最終的に粉粒体が静止するとホッパー部の開口部横と Bin 部に安息角を形成して堆積するが、図に示しているように、計算結果 ((a) 3図と (c) 3図) は実験結果 ((b) 3図と (d) 3図) をよく表している。計算の対象としたガラスビーズ径 $200\mu\text{m}$ の安息角は $28^\circ - 30^\circ$ である。より詳しい計算結果やより詳しい実験結果との比較 (計算結果と実験結果の比較の動画や開口部からの粉粒体流量の比較等は著者等の報告³⁾ を参照いただきたい。

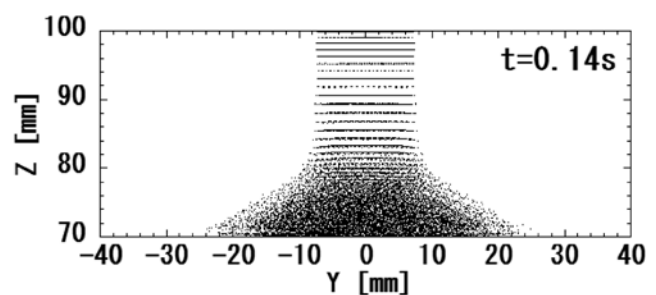
4 円錐状堆積体の底面応力分布

円形開口部から流出して平板上に堆積した粉粒体の平板上にかかる応力を SPH で計算して、他の研究者の実験値⁹⁾ と比較して、検討した。前述した角型ホッパーの計算の場合も本計算の場合も、平滑化する場合、一点について通常30数個の仮想粒子の影響を計算している。Fig.5に仮想粒子の粒子位置図の計算結果を示す。Fig.5 (a) に、 $Z=100\text{mm}$ に設けた径が 15mm の円形出口に一樣乱数で配置された仮想粒子が初速 0.4m/s で落下して、 $Z=70\text{mm}$ にある径が 70mm の円形平板に堆積する様子を示す。最終的に粉粒体が堆積した様子を Fig.5 (b) に示す。Fig.5 (b) の状態において、底の平板にかかる垂直応力分布を Ai 等⁹⁾ が測定しているのので、彼等の実験値と SPH で計算した筆者等の計算結果の比較を行った。粉粒体を上部から供給する出口半径 R_j と最終的な堆積体の底の半径 R_0 との比がほぼ同一 (筆者等の計算の $R_j/R_0 = 0.23$, Ai 等の実験⁹⁾ の $R_j/R_0 = 0.21$) な場合を比較した。それを Fig.6 に示す。図中の H は堆積体の高さ、 ρ_{ba} は堆積体の平均嵩密度である。図から分かるように、SPH による垂直応力分布は Ai 等の実験結果をほぼ表現している。粉粒堆積体の底の応力分布は粉粒体がどのように供給されて堆積体を形成するかによって大きく変化することを Ai らは実験によって示している。粉粒体の供給過程、堆積体の形成過程はラグランジアン的に軌跡を追跡する計算で正確に明らかになる。このような力学場を理論的に明らかにする手法として SPH は最適である。

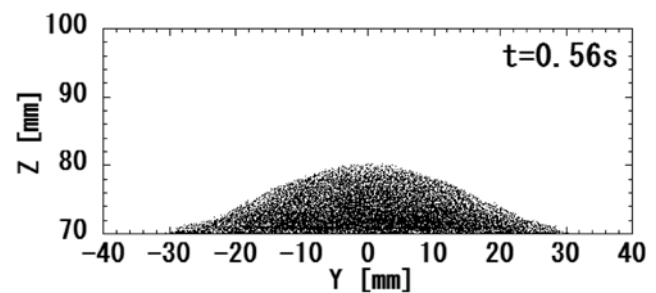
5 まとめ

粉粒体について実際の力学場の SPH シミュレーション結果を基にして、実験結果と比較検討等によって SPH を説明したが、以下にそのまとめを箇条書きで示す。

1. SPH は連続体を計算する方法なので、対象体、この場合は粉粒体であるが、それを連続体化する必要がある。すなわち、連続体として求めた支配方程式 (通常は保存則によって求める) を閉じた形にしなければならない。それには構成式 (状態式を含む) を明らかにする必要がある。



(a)



(b)

Fig.5 Calculated snapshots of conical granular pile: (a) at $t = 0.14\text{s}$, (b) at $t = 0.56\text{s}$.

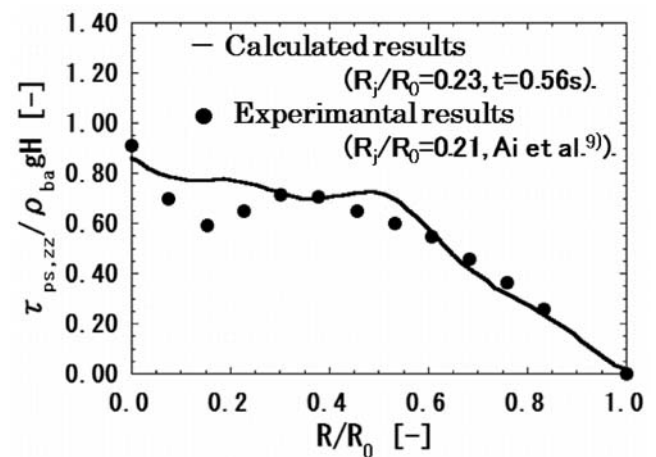


Fig.6 Comparison of calculated normal stress beneath conical pile with experimental results by Ai et al.⁹⁾.

2. SPHは圧縮性の連続体を、密度変化を基にして計算するので、計算対象は圧縮性連続体である。圧縮性であるので、時間ステップ Δt が満足しなければならないクーラン条件には対象物中の音速が基準となる。
3. SPHは連続体場を、重なりをもった仮想粒子に分割し、それらの全ての軌跡を計算して、力学場を明らかにする。
4. 連続体中の仮想粒子のラグランジアン軌跡を計算するためには、その仮想粒子が周囲の連続体からの影響を計算しなければならない。その影響を表すのがkernel関数(分布関数)で、力学場によって異なる関数が用いられているが、通常3次のスプライン関数がよく用いられる。
5. SPHはラグランジアン的に支配方程式を計算し、時間に関する常微分式を解けばよいので計算方法は簡単である。
6. 連続体を仮想粒子に分割してその全軌跡を計算して、力学場をあきらかにするので計算負荷は高い。
7. 境界条件は境界に隣接した外側に仮想粒子を置くことによって工夫して表現する。
8. 仮想粒子のラグランジアン軌跡を計算するので、自由境界は自動的に求まる。
9. 影響範囲は通常その点の仮想粒子の大きさ h_i の2倍を半径とした球内を影響範囲とする。この大きさを変えて、計算結果が変わらないかどうか、試してみるのがよい。

参考文献

- 1) P.A.Cundall and O.D.L.Strack: Geotechnique, 29 (1979), 47.
- 2) S.Yuu and T.Umekage: Adv.Powder Technol., 19 (2008), 203.
- 3) S.Yuu and T.Umekage: Materials, 4 (2011), 1440.
- 4) 湯晋一, 林昭久, 脇昌裕, 梅景俊彦: 粉体工学会誌, 34 (1997), 212.
- 5) J.J.Monaghan: Computer Phys.Communications, 48 (1988), 89.
- 6) J.J.Monaghan: Ann.Rev.Astron.Astrophys., 30 (1992), 543.
- 7) For example, K.Shibata, S.Koshizuka, M.Sakai and K.Tanizawa: Ocean Eng., 42 (2012), 13.
- 8) R.Gutfraind and S.B.Savage: Mechanics of Materials, 29 (1998), 1.
- 9) J.Ai, J.Y.Ooi, J.F.Chen, J.M.Rotter and Z.Zhong: Mechanics of Materials, 66 (2013), 160.

(2014年7月10日受付)