



特集記事・13

鉄鋼におけるマルチスケール・マルチフィジックス計算材料科学

XFEMを用いた鋼構造物の疲労亀裂進展解析

Numerical Simulation of Fatigue Crack Propagation Using XFEM

東京大学 大学院工学系研究科 システム創成学専攻 講師 柴沼一樹 Kazuki Shibamura

東京大学 人工物工学研究センター 教授 鈴木克幸 Katsuyuki Suzuki

1 はじめに

現在、我が国の経年した鋼橋において疲労亀裂の発生が多数報告されており、その原因解明と効果的な補修・補強や点検等の維持管理の合理化が緊急の課題となっている。図1に近年報告された疲労損傷の事例を示す¹⁾。これに対し、実橋に発生した疲労亀裂の進展挙動を数値解析により、容易かつ高精度にシミュレートすることが可能となれば、鋼橋における疲労亀裂の発生・進展のメカニズム解明とその維持管理の合理化に対して非常に有効な手段となりうる。

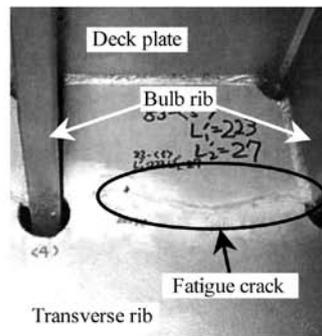
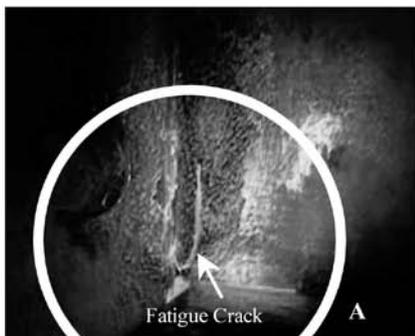
しかし、構造解析に広く採用されている有限要素法 (FEM) は、本来、連続体を対象として構築されたものであるため、FEMを亀裂解析に適用する場合には、メッシュ生成に関して以下の解決すべき課題が存在する。(1) 亀裂による不連続面のモデル化のために、亀裂形状に要素境界を一致させる必要がある。(2) 破壊力学パラメータを精度よく評価するために、亀裂先端近傍において要素の細分化や特異要素の使用が必要となる。(3) 亀裂の進展過程を考えた場合、進展に伴い上記 (1)、(2) の複雑な処理を繰り返し行うリメッシュ処理

が必要となる。このため、既往の研究においてFEMを用いた疲労亀裂の進展解析の実施が報告されているが、鋼橋の鋼床版のような複雑かつ大規模な構造体に局所的に発生する疲労亀裂の挙動を精度よく評価することは、高度な工夫とノウハウを要するため容易ではない。

本稿では、このようなFEMを用いた亀裂解析を合理的に可能とするために提案された拡張有限要素 (eXtended FEM: XFEM) について、その定式化に関する基礎的研究および鋼構造物に発生した疲労亀裂の進展解析への適用事例を著者らの取り組みや研究成果を中心に解説する。

2 拡張有限要素法 (XFEM)

近年、上述のようなFEMにおけるメッシュ生成に関する困難を回避するために、FEMにおける枠組みの中で、その近似法を一般化したPartition of Unity FEM (PUFEM) が提案された²⁾。この手法は、Partition of Unity (PU) という概念を導入し、対象とする問題の既知である解の特性を直接的に利用する新しい近似の考え方を採用するものである。



(a) 鋼桁橋中間横桁に発生した疲労亀裂

(b) 鋼床版橋梁のバルブリブと横リブの交差部に発生した疲労亀裂

図1 鋼橋における疲労損傷

さらに、このPUFEMの典型的な適用例として、拡張有限要素法 (XFEM) が提案された^{3,4)}。このXFEMは任意の局所的な領域内において、要素内部に不連続性や特異性を含む関数を節点単位で付加する「エンリッチメント」と呼ばれる高度な近似を構成する手法である。このエンリッチメントを有するXFEMの定式化は単純かつ明解なものであるにもかかわらず、従来のFEMが苦手とする不連続性を容易にモデル化することができるため、国内外において様々な適用例や高度化の研究成果が報告されている。特にXFEMを亀裂解析に適用した場合、通常のFEMとは異なりメッシュとは独立に任意の亀裂の不連続面をモデル化できるため、上記のFEMによる亀裂進展解析におけるメッシュの生成に関する課題の多くを改善あるいは解消することが可能であると考えられる。図2に通常のFEMとXFEMによる亀裂進展解析の比較を模式的に示す。

XFEMを線形破壊力学に基づく亀裂解析に適用した場合、一般的に変位場の近似 $\mathbf{u}_{ap}(\mathbf{x})$ は次式のように書ける。

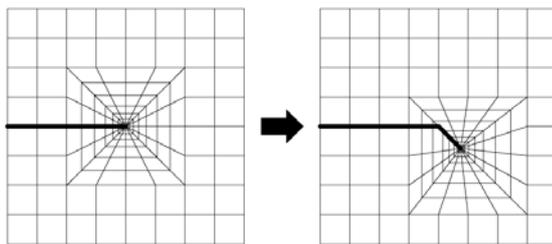
$$\mathbf{u}_{ap}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{std}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_J(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_C(\mathbf{x}) \quad (1)$$

式(1)において、 $\mathbf{u}_{std}(\mathbf{x})$ は標準の有限要素近似、 $\mathbf{u}_J(\mathbf{x})$ および $\mathbf{u}_C(\mathbf{x})$ はそれぞれ亀裂不連続面および亀裂先端特異場に対応したエンリッチメントであり、各々次式で書ける。

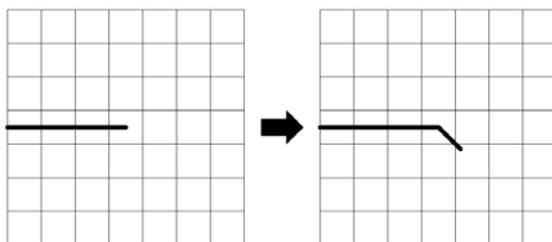
$$\mathbf{u}_{std}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in N} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_J(\mathbf{x}) = \sum_{I \in J} \phi_I(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_C(\mathbf{x}) = \sum_{I \in C} \phi_I(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{kI} \quad (4)$$



(a) FEM



(b) XFEM

図2 FEMとXFEMの亀裂進展解析の比較

ここで、 $\phi_I(\mathbf{x})$ は有限要素近似の形状関数、 \mathbf{u}_I , \mathbf{b}_I および \mathbf{c}_{kI} ($k=1, \dots, 4$) は節点自由度である。 $H(\mathbf{x})$ は亀裂による変位の不連続性を表す Heaviside 関数であり、次式で書ける。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{on } \Omega_+ \\ -1 & \text{on } \Omega_- \end{cases} \quad (5)$$

Ω_+ および Ω_- はそれぞれ亀裂不連続面に対する上側および下側の部分領域である。一方、 $\gamma_k(\mathbf{x})$ ($k=1, \dots, 4$) は亀裂先端近傍の特異場を表す関数であり、次式で書ける。

$$\gamma_k(\mathbf{x}) = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (6)$$

(r, θ) は亀裂先端を原点とし、亀裂先端方向を $\theta = 0$ とした極座標である。これらのエンリッチ関数および \mathbf{b}_I を図3に示す。また、式(3) および式(4)における J および C は亀裂近傍でエンリッチメントを付加する節点集合である。

上記はXFEMが提案された当初の定式化あり、現在も広く用いられているものである。しかし、その後の研究により、XFEMにおける近似法において不可避免的に発生する一部の節点のみにエンリッチ関数が付加された要素 (Blending Elements: BE) において、近似精度の低下が指摘された⁵⁾。これにより、XFEMに関する多くの適用例は潜在的にBEの

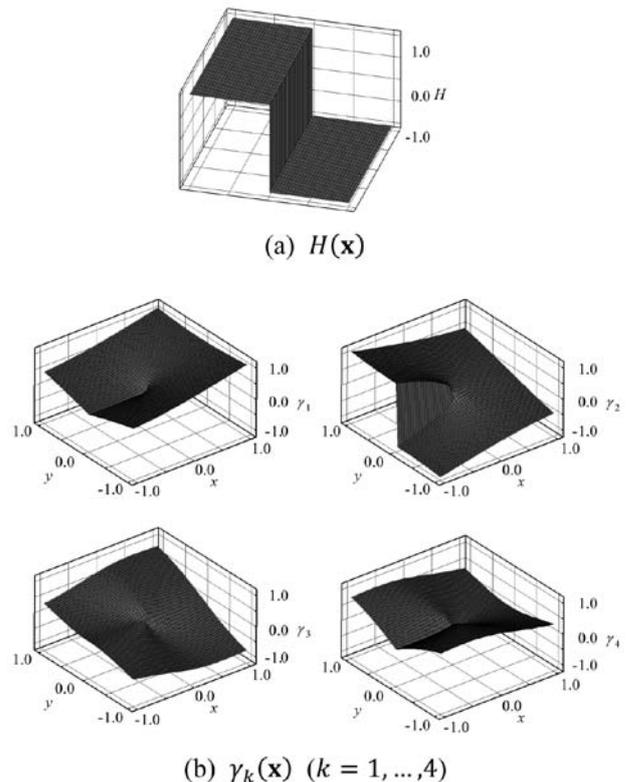


図3 亀裂解析に用いるエンリッチ関数

問題を有していることが明らかとなった。このBEの問題はXFEMの本質的な問題であり、かつ実用において重大な問題となりうる。

そこで、著者らはこのXFEMの本質的な問題であるBEの問題を解決するために、新たなXFEMの定式化 (PU-XFEM) を行った⁶⁾。これは、XFEMが本来PUFEMの典型的な適用例として提案された手法であるにもかかわらず、解析モデル全体の近似精度の保証を基礎としたPUFEMの近似法と、XFEMにおいて近似精度の低下をもたらすBEの問題との間の矛盾に着目し、PUFEMのXFEMに対する適用法において、近似精度を保証する上で重要となるPUの取扱いに再検討を加えることで、XFEMの再定式化を試みたものである。本稿では、このPU-XFEMを亀裂解析へ適用する場合の変位場の近似法に関して概説する。定式化の導出やその妥当性検証に関する詳細は既報の文献⁶⁾を参照されたい。

PU-XFEMを亀裂解析に適用した場合、変位場の近似 \mathbf{u}_{ap} (\mathbf{x}) は次式のように書ける。

$$\mathbf{u}_{ap}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_0^{ap}(\mathbf{x}) + \varphi_C(\mathbf{x})\mathbf{v}_C^{ap} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\varphi_0(\mathbf{x})$ と $\varphi_1(\mathbf{x})$ はそれらの総和が任意の位置で1となる Partition of Unity (PU) であり (すなわち、常に $\varphi_0(\mathbf{x}) + \varphi_C(\mathbf{x}) = 1$ を満足する。)、次式で書ける。

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = \sum_{I \in C} \phi_I(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\varphi_C(\mathbf{x}) = \sum_{I \in C} \phi_I(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、 $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ と $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$ はそれぞれ標準の有限要素近似およびエンリッチメントに対応する近似関数であり、次式で書ける。

$$\mathbf{v}_0^{ap}(\mathbf{x}) = \sum_I \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{I \in J} \phi_I(\mathbf{x})H(\mathbf{x})\mathbf{b}_I \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\mathbf{v}_C^{ap}(\mathbf{x}) = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) \left(\mathbf{w}_I + \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x})\mathbf{c}_I^k \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

このように、PU-XFEMでは、「標準の有限要素近似」および「エンリッチメント」に対応するPUおよび近似関数の積の和として変位場の近似を定義する手法である。図4にPU-XFEMを用いた亀裂解析の模式図を示す。

さらに、従来のXFEMとPU-XFEMの解析精度を比較した結果の一例として、応力場の厳密解が既知な基本的な線形破壊力学問題の数値解析モデルを用いた理論解との誤差分布を図5に示す。従来のXFEMを用いた場合には亀裂先端近傍に大きな誤差を生じるのに対し、PU-XFEMはエンリッチメントによって理想的な近似が再構成し、応力場が正確に再現可能であることが分かる。

3 疲労亀裂進展解析への適用

ここでは、亀裂の進展挙動を2次元的に取り扱い可能な板厚貫通型亀裂を対象としたPU-XFEMの疲労亀裂進展解析への適用方法を述べる。

疲労亀裂の進展挙動は、亀裂の「進展経路」および「進展速度」を事前に評価できれば予測することが可能となる。これらは共に亀裂先端における応力拡大係数範囲 ΔK を用いることで評価可能であることが経験的に知られている。XFEMによる疲労亀裂進展解析の模式図を図6に示す。

XFEMを用いた亀裂解析において、応力拡大係数 K は領域積分形式の相互積分法 (M 積分法)⁷⁻⁹⁾を用いることで、最も合理的に評価可能であるとされている¹⁰⁾。この相互積分法を用いることで、亀裂先端近傍の変形モードを分離することが可能となる。なお、 K は線形弾性体を仮定した線形破壊力学パラメータであるため、その繰り返し荷重に対する振幅である ΔK を評価するにあたり、外力の振幅のみを考慮すればよい。

疲労亀裂の進展経路を評価は、亀裂先端の接線応力の振幅 $\Delta\sigma_\theta$ が最大となる方向 θ_c に亀裂が進展すると仮定した次式の最大接線応力範囲基準¹¹⁾に従うものとする。

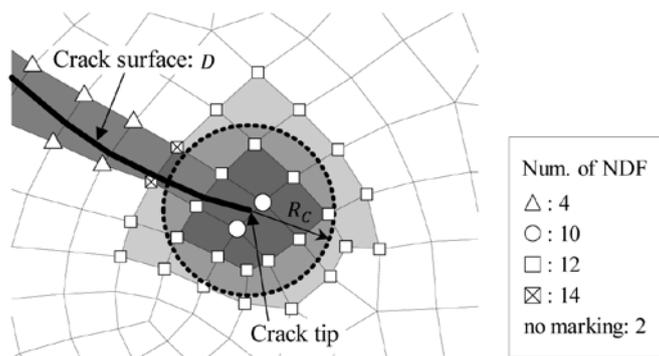


図4 PU-XFEMにおける亀裂のモデル化と節点集合

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta K_I}{\Delta K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta K_I}{\Delta K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right\} \dots\dots\dots (12)$$

この最大接線応力範囲基準に関する実験的な妥当性の検証は、高張力鋼の残留応力場における疲労亀裂を対象に実施されている¹²⁾。

一方、鉄鋼材料における疲労亀裂の進展速度を評価する経験則として最も一般的に用いられているのは次式で示されるParis則である。

$$\frac{da}{dN} = C \left\{ \Delta K^m - (\Delta K_{th})^m \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 C および m は材料定数であるが、日本鋼構造協会の鋼構造物の疲労設計指針・同解説では平均設計曲線として、それぞれの定数を $C=1.50 \times 10^{-11}$ 、 $m=2.75$ 、 $\Delta K_{th}=2.9 \text{MPa}\sqrt{m}$ とすることが提案されている¹³⁾。これらの係数は、溶接部の高い引張残留応力の作用の下、亀裂進展速度の遅延をもたらす亀裂閉口がない条件下で求められたものであり、安全側の評価となることを許容したものである。また、モードI・IIの混合モードにおいては、式(13)の ΔK は次式の等価応力拡大係数範囲を用いることができる¹⁴⁾。

$$\Delta K = \Delta K_I \cos^3 \left(\frac{\theta_c}{2} \right) - 3\Delta K_{II} \cos^2 \left(\frac{\theta_c}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_c}{2} \right) \dots\dots (14)$$

ここでは各計算ステップにおいて、あらかじめ指定した亀裂の進展長さ Δa により、亀裂形状データを更新することとした(図6参照)。応力拡大係数範囲 ΔK の進展前後の計算結果を線形補間により近似することで、式(13)より荷重回数 N を逆算することができる。

式(12)および式(13)に示した進展則は共に応力拡大係数範囲 ΔK_I および ΔK_{II} に基づき評価するものであり、構造体に生じる残留応力や死荷重などの平均応力の影響を考慮していない。このため、解析条件が単純化され、容易に進展挙動

のモデル化が可能となる。

近年では多くの汎用FEM解析ソフトウェアの機能が充実し、それを用いた大規模構造物の挙動に関して解析的な検討が実施されつつある。通常のFEMとXFEMの違いは、変位場を近似するための内挿関数の定義のみである。そこで、著者らは代表的な汎用FEM解析ソフトウェアのひとつであるABAQUSに対し、PU-XFEM近似を実装することで3次元構造体に発生した板厚方向貫通亀裂を対象とした疲労亀裂進展シミュレーションが可能となる解析コードの開発を行った¹⁵⁾。次節ではこの解析コードを使用した適用例を示す。

4 実構造物における疲労亀裂進展挙動の再現解析

ここでは、上記で述べたPU-XFEMを実装した解析コードの平板シェルでモデル化可能な3次元構造体に発生した疲労亀裂進展解析に関する2件の適用事例を示す。

4.1 鈹桁橋中間横桁に発生した疲労亀裂への適用

鈹桁橋中間横桁端部のフランジおよびウェブの溶接接合部より疲労亀裂が発生し、その後ウェブ内部へと進展していく損傷が多く確認されている。ここでは、図1(a)に示した鈹桁橋中間横桁に発生した疲労亀裂を対象とする。確認時の亀裂形状は、全長約55mmであり、進展初期でウェブ中央部に向

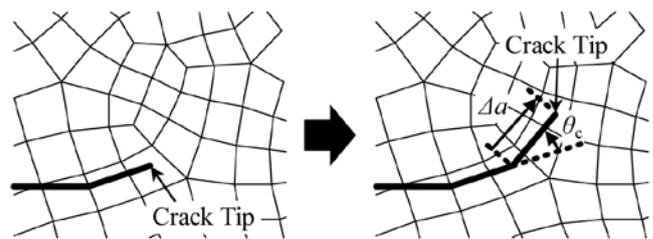


図6 疲労亀裂進展挙動のモデル化

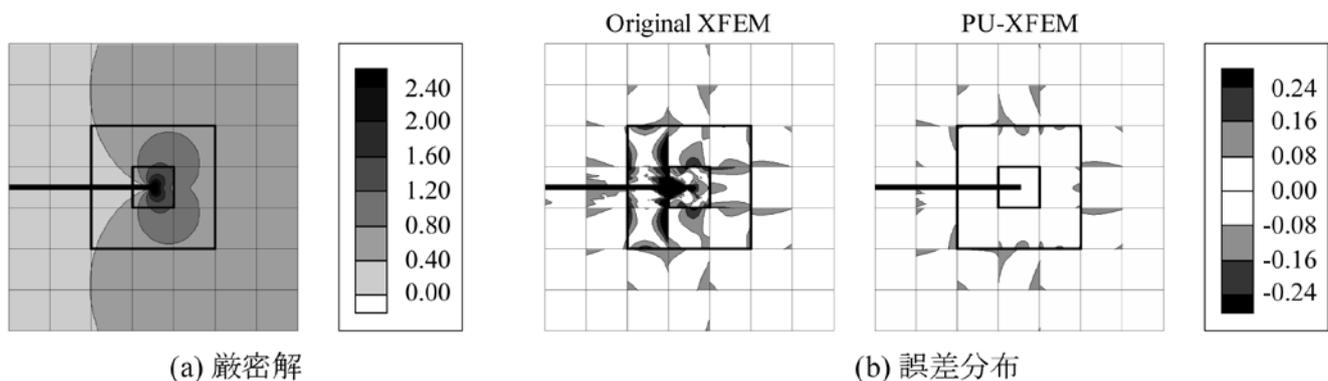
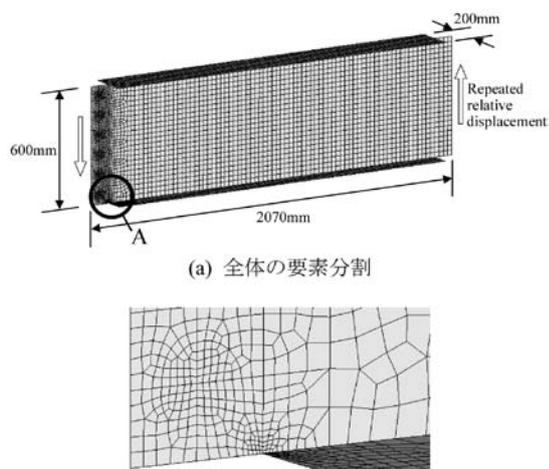


図5 従来のXFEMとPU-XFEMによる応力場の再現性解析結果

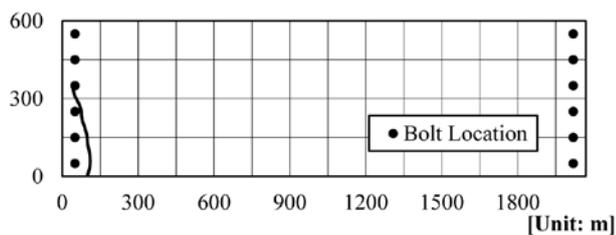
かい、その後徐々に鉛直上へと変化しているものであった¹⁾。

本検証の解析モデルとしては、中間横桁の一部材のみをモデル化するものとする (Model 1)。モデルの要素分割を図7に示す。また、解析モデルにおいてボルト孔はあけず、中間横桁に作用する荷重条件のモデル化として、ボルト位置矢印方向に最小0.0mm、最大1.0mmの強制的な繰り返し相対変位を与えるものとした。初期亀裂として、解析モデル全体の寸法に対して十分に短い $a_0=3.5\text{mm}$ を実橋における疲労亀裂の発生部位に仮定した。

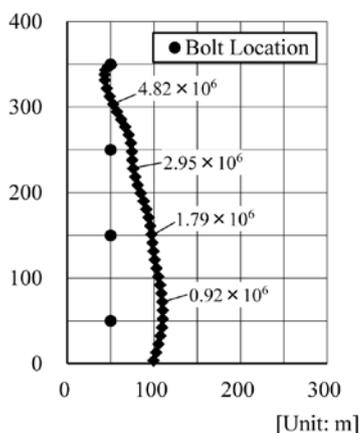


(b) 疲労き裂発生部位の要素分割 ((a)のA部拡大)

図7 鋼桁橋中間横桁の有限要素モデル (Model-1)



(a) 横桁全体



(b) 亀裂伝播部詳細

図8 疲労亀裂進展経路の解析結果 (Model-1)

以上の条件より、疲労亀裂進展解析を実施し、得られた亀裂進展経路を図8に示す。また、図9に ΔK の推移、図10に載荷繰り返し数に対する亀裂長さの関係を示す。さらに、亀裂進展に伴う最大主応力分布の推移を図11に示す。これらの解析結果より、進展の序盤である亀裂長さ約60mmまでの範囲において疲労亀裂の進展方向は、まず横桁の中央部に向かい、その後ゆるやかに鉛直上向きへと変化した。これは、図1(a)に示す実橋において確認された亀裂形状と同様の傾向である。さらに、この疲労亀裂はその後徐々に湾曲し、進展経路は外側方向へと変化した。最終的にはボルト位置近傍において応力拡大係数範囲 ΔK が急激に低下し、その下限界 ΔK_{th} を下回るため亀裂は停留し、横桁全体の破断には至らないものであると推定された。

4.2 バルブリブ鋼床版試験体の疲労試験への適用

図1(b)に示したように、鋼床版橋梁のバルブリブと横リブの交差部で多数の疲労亀裂が発見されている。特に、それらの亀裂のうち、横リブのスリット下部の溶接部下端から横リブ内部へと進展する場合が全損傷数の大部分を占めている¹⁶⁾。また、この種の疲労亀裂は、実橋において様々な進展経路が確認されており、その原因やメカニズムは明らかにされてい

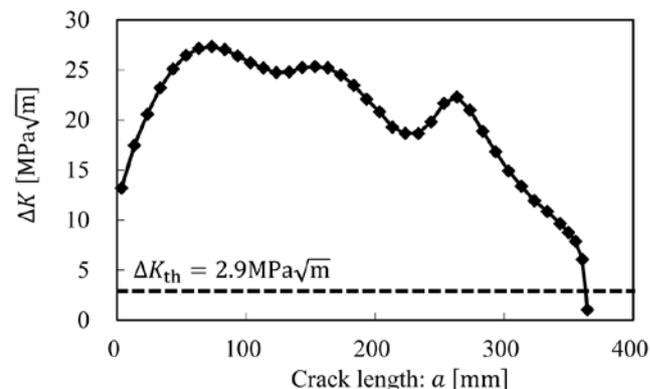


図9 疲労亀裂進展に伴う ΔK の解析結果 (Model-1)

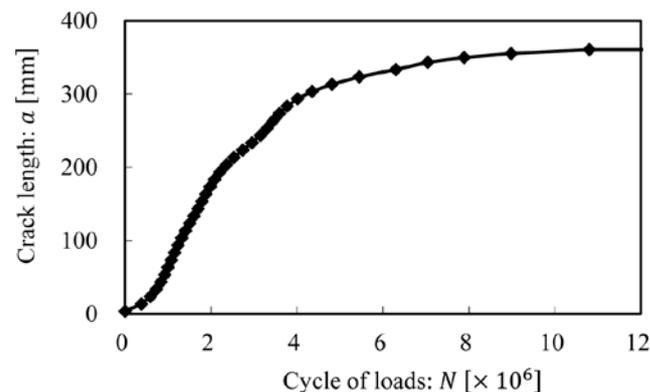


図10 載荷回数と亀裂長さの関係 (Model-1)

ない。ここでは、上記の疲労亀裂の発生が確認されたバルブリブ鋼床版の実スケール模擬試験体 (図12) の疲労試験¹⁷⁾を対象として、疲労亀裂進展解析を実施した事例を示す。

試験体は、横リブ3本およびバルブリブ5本を配置しているが、中央の横リブと左端のバルブリブの交差部において疲労亀裂が確認された。疲労亀裂の進展経路を図13に示す。なお、疲労試験の実施範囲における最終的な亀裂長さは $a=33.1\text{mm}$ であった。ただし、図13の写真は疲労亀裂の発生部位近傍を試験後に切り出したものであり、亀裂先端部のストップホールは本論文で対象とした疲労試験後に施されたものである。また、ストップホールの近傍に見える孔は、疲労試験においてストップホール施工後に当て板補強を実施するためのボルト孔である。

本検証の解析モデル (Model 2) の全体図およびその要素分割を図14に示す。また、本試験の荷重位置を図-14 (a) に

併記する。疲労試験では、最終的な荷重回数である 1.8×10^6 cycleに至るまで、亀裂の進展に伴い荷重を変化させているが (図17参照)、シミュレーションでは荷重を疲労試験で得られた亀裂長さに対応させて推移させるものとした。境界条件としては、モデル最下部であるソールプレートの中央部鉛

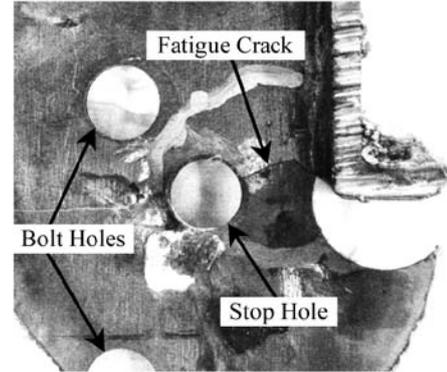


図13 実験で得られた疲労亀裂の進展経路

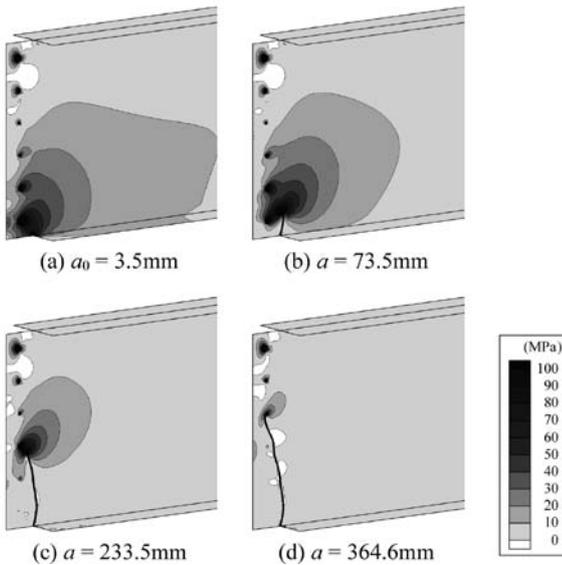


図11 亀裂進展に伴う応力場の推移 (Model-1) ; (a) $a_0=3.5\text{mm}$ 、(b) $a=75.3\text{mm}$ 、(c) $a=233.5\text{mm}$ 、(d) $a=364.6\text{mm}$

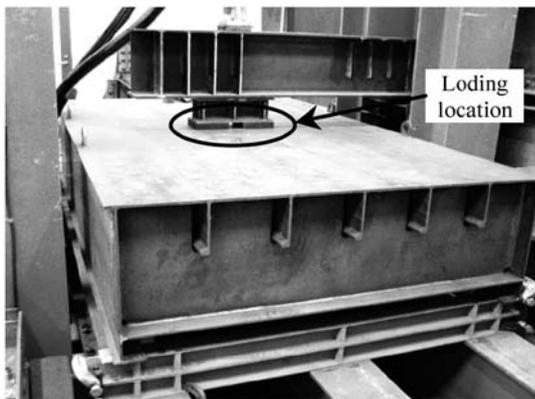
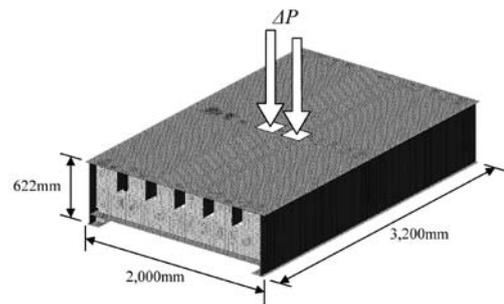


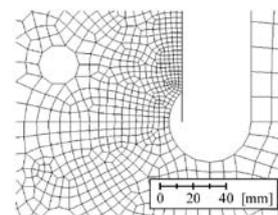
図12 バルブリブ鋼床版の実スケール模擬試験体



(a) デッキプレートの要素分割と荷重位置



(b) 横リブの要素分割および疲労亀裂発生部位B



(c) 疲労き裂発生部位の要素分割 ((b)のB部拡大)

図14 バルブリブ鋼床版の実スケール模擬試験体の有限要素モデル (Model-2)

直方向変位を拘束し、水平方向変位は自由とした。初期亀裂としては、疲労試験の序盤である载荷回数 1.0×10^5 cycleで確認された亀裂長さ $a_0=9.3\text{mm}$ を仮定した(図15(a)参照)。

以上の条件のもと、疲労亀裂進展解析を実施した。まず、疲労亀裂の進展経路に関して解析および疲労試験の結果を比較するため、それぞれの進展経路を重ね合わせて図15に示す。これより、バルブリブ鋼床版の実スケール模擬試験体という複雑な3次元構造体において、局所的な領域に発生した疲労亀裂を対象としているにも関わらず、解析結果は疲労試験の結果と非常に良い一致が確認された。したがって、用いた解析コードにより疲労亀裂の進展経路を正確に再現可能であることが示された。次に、応力拡大係数範囲 ΔK の推移を図16に示し、疲労亀裂の進展速度に関して解析および疲労試験の結果を比較した結果を図17に示す。これより、疲労試験を実施した範囲において2倍程度安全側に評価された。ここで、式(13)で示した亀裂進展速度式の係数が溶接部の高い引張残留応力の作用の下、亀裂進展速度の遅延をもたらす亀裂閉口がない条件下で求められたものであることを考慮すれば、この程度の安全側の評価は妥当なものと考えられる。以上より、本検証における解析結果は、疲労寿命の評価におい

ても十分な実用性を有していると考えられる。

5 おわりに

本稿では、まず、従来のFEMを用いて大規模構造物に発生した局所的な疲労損傷を評価する際のメッシュ生成に関する困難と、それを解消するために提案されたXFEMを用いた亀裂解析を概説し、その近似法の不完全性を修正した新たな定式化(PU-XFEM)の概要を述べた。さらに、このPU-XFEMを用いて実構造物における疲労亀裂進展挙動の再現解析を実施し、その有効性を検証した事例を紹介した。

ここで扱ったような土木構造物は極めて大型の構造物であり、その一つ一つが構造、立地、使用条件の異なる特注製品であるといえる。したがって、いま我が国が迎つつある社会インフラの急速な高齢化に対応可能するためには、従来のような実験・実測による検証や対策の立案だけでは不十分であるのは明白である。今後は、ここで紹介したXFEMに限らず、さらに合理的・効果的に社会インフラの経年劣化を予測・評価可能な解析手法を開発し、それを組み込んだ維持管理システムを構築していくことが求められるだろう。

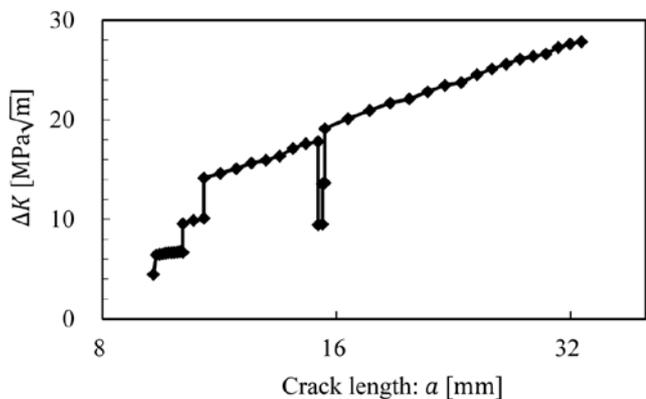


図16 疲労亀裂進展に伴う ΔK の解析結果 (MODEL-2)

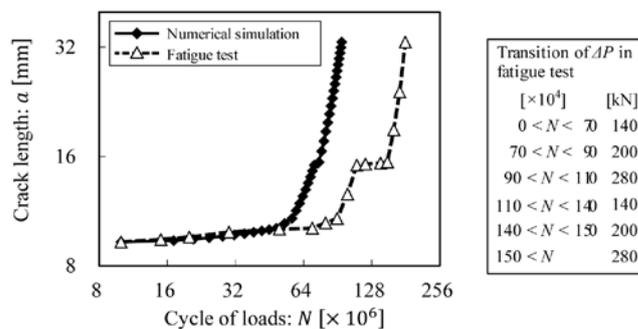


図17 载荷回数と亀裂長さの関係 (MODEL-2)

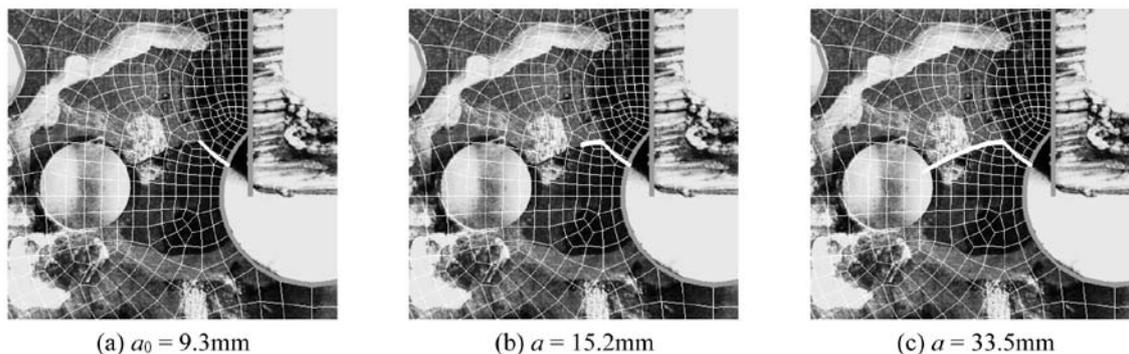


図15 疲労亀裂進展経路の解析結果 (Model-2)

参考文献

- 1) 柴沼一樹, 青井弘樹, 宇都宮智昭, 坂野昌弘, 夏秋義広: 鋼構造年次論文報告集, 17 (2009), 267.
- 2) J.M.Melenk and I.Babuška : Comput.Meth.Appl.Mech. Eng., 39 (1996) , 289.
- 3) T.Belytschko and T.Black : Int.J.Numer.Meth.Engng., 45 (1999) , 602.
- 4) N, Moës, J.Dolbow and T.Belytschko : Int.J.Numer. Meth.Engng., 46 (1999) , 131.
- 5) J.Chessa, H.Wang and T.Belytschko : Int.J.Numer.Meth. Engng., 57 (2003) , 1015.
- 6) K.Shibanuma, T.Utsunomiya and S.Aihara : Int.J.Numer. Meth.Engng., 97 (2014) , 551.
- 7) F.Z.Li, C.F.Shih and A.Needleman : Eng.Fract.Mech., 21 (1985) ,405.
- 8) J.F.Yau, S.S.Wang and H.T.Corten : J.Appl.Mech., 47 (1980) , 335.
- 9) 柴沼一樹, 宇都宮智昭 : 土木学会論文集A, 64 (2008) , 303.
- 10) T.Nagashima, Y.Omoto and S.Tani : Int.J.Numer.Meth. Engng., 56 (2003) , 1151.
- 11) 北川英夫, 結城良治, 東郷敬一郎 : 機械学会論文集A, 47 (1981) , 1283.
- 12) 大路清嗣, 辻昌宏, 久保司郎, 小野嘉雄, 八幡篤, 梅井健司 : 機械学会論文集A, 59 (1993) , 1429.
- 13) 日本鋼構造協会 : 鋼構造物の疲労設計指針・同解説, 技報堂出版, (1993) , 245.
- 14) 田中啓介, 秋庭義明, 加藤拓也, 高橋弘樹 : 機械学会論文集A, 71 (2005) , 607.
- 15) 柴沼一樹, 青井弘樹, 宇都宮智昭, 坂野昌弘, 夏秋義広 : 応用力学論文集, 13 (2010) , 945.
- 16) 田畑晶子, 山村清, 濱田信彦, 迫田治行, 酒井優二, 坂野昌弘 : 土木学会第62回年次学術講演会講演概要集, (2007) , I-003.
- 17) 崎谷浄, 杉山裕樹, 川村勝, 坂野昌弘, 山岡大輔, 迫田治行 : 土木学会第64回年次学術講演会講演概要集, (2009) , I-144.

(2014年8月20日受付)