



入門講座

伝熱工学－4

対流伝熱 Convection Heat Transfer

森 昌司 九州大学 大学院工学研究院
機械工学部門
Shoji Mori 教授

1 はじめに

今回は、第1回の「伝熱基礎」で紹介された3つの伝熱様式(伝導、対流、ふく射)の内、対流伝熱を解説する。第1回目の入門講座と重複している点をご容赦頂きたい。対流は、熱伝導と流れに伴うエンタルピーの輸送の二つの形式が共存して熱を輸送する伝熱様式である。固体表面と流体との間の対流による伝熱現象を熱伝達または対流伝熱という。以下、用語を「対流伝熱」で統一する。対流は、その駆動方式により、強制対流と自然対流、その中間の共存対流に分類される。また、流動様式により層流と乱流、外部流れか内部流れ(管内流)、あるいは気液相変化を伴う対流(第6回に解説)かによる分類も行われる。今回は、鉄鋼分野において比較的多く遭遇する平板外部流れの強制対流、自然対流について主に解説を行いたい。

$$q = h(T_w - T_f) \dots\dots\dots (4-1)$$

ここに、 q は熱流束(W/(m²))、 h は、熱伝達率(W/(m²・K))であり、 T_w と T_f はそれぞれ固体壁面の温度および流体の温度である。この式で定義される h の値を何らかの方法で得ることができれば、 h と T_w から熱流束、 h と熱流束から T_w を求めることが可能となる。特に h は、物性値ではなく、流速、表面形状、流動様式によって影響を受けるため、 h をどのようにして求めるかが重要となる。その熱伝達率の概略値は第1回目にも示されたが、そのオーダを表4-1の通り、ざっくりと把握しておくことはエンジニアにとって有益だろう。すなわち気体の自然対流の h は10 W/(m²・K)、対流の種別が同じ場合に、気体から液体になると1オーダ大きくなり、自然対流、強制対流、沸騰・凝縮も、その順に、おおよそ1オーダずつ増加していく。

2 ニュートンの冷却法則と熱伝達率

固体表面と流体との間の伝熱は、対流によって行われる。流体と接している固体表面の固体壁面と流体との間の熱輸送において、(伝熱量)/(面積) ∝ (温度差) という実験事実から比例定数を h としてニュートンの冷却法則と呼ばれる次式が得られる。

3 温度境界層と速度境界層

熱伝達率を考える上で、境界層の概念は極めて重要である。水風呂に入ったときを思い浮かべてみよう。図4-1に示すように、体表面近傍には体温から冷水温まで急激に温度が変化する薄い層が形成されるだろう。この薄い層を温度境界層と呼ぶ。その一方、流れを作った場合、体の表面では速度

表4-1 熱伝達率の概略値とそのオーダ

対流の種別	熱伝達率の概略値(W/(m ² ・K))	熱伝達率のオーダ(W/(m ² ・K))
自然対流	気体：2～30 液体：50～1000	気体：10 液体：100
強制対流	気体：30～250 液体：100～10000	気体：100 液体：1000
沸騰・凝縮	2500～100000	10000

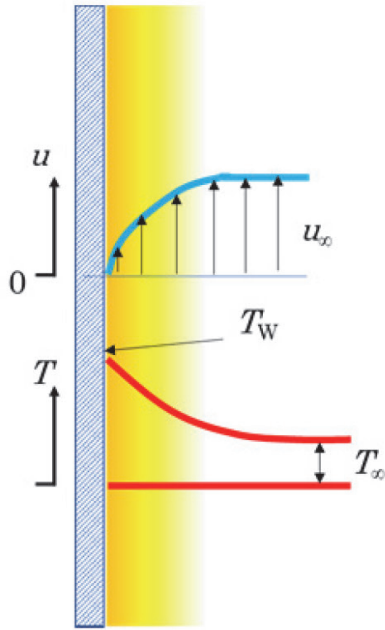


図4-1 速度境界層と温度境界層 (Online version in color.)

はゼロとなるが、それから離れるにしたがって速度が急激に増加する薄い層が形成されるだろう。これを速度境界層と呼ぶ。水風呂で水をかき混ぜて体表面近傍の水の流速を早くすると、これらの境界層は薄くなり、冷水が体に近づくことで、熱が伝わりやすくなり、結果として冷たく感じる。逆に熱いお湯に入っているときにじっとしていれば我慢できるが、お湯をかき混ぜると熱くて我慢ができなくなるのも同様の理由である。したがって温度境界層厚さを薄くすれば、熱伝達率は大きくなる。

次に熱伝達率を求めることを考えて見よう。図4-1から明らかなように、壁表面においては速度がゼロであるので、表面では熱伝導のみで熱が伝わることになる。したがって壁表面の流体側にフーリエの法則を用いると、熱伝達率は、以下の通り与えられる。

$$h \equiv \frac{q}{(T_w - T_f)} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}}{(T_w - T_f)} \quad (4-2)$$

電子素子冷却などの場合には発熱密度がわかっているので壁面温度が既知であれば容易に定義式 $h = q / (T_w - T_f)$ から熱伝達率は求められるが、発熱密度がわからない場合には、 $h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}}{(T_w - T_f)}$ の関係から熱伝達率を求める必要がある。すなわち、この関係は壁面上の流体側の温度分布がわかれば、熱伝達率を求めることができることを示している。次の例題でそれを説明しよう。

例題 4.1

今、平板に沿った主流温度 20°C の空気の流れにおいて、平板のある表面位置での平板近傍部分（境界層領域）における垂直方向の流体の温度分布を測定したところ、次式で表されることがわかった。

$$T = 70 - 4.5 \times 10^4 y + 5 \times 10^9 y^3$$

ここで、 y は平板表面からの垂直方向の距離 [m] である。空気の熱伝導率を $0.03 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ として、この位置の局所熱伝達率 $h \text{ [W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$ を求めよう。

【解説】 温度分布から

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= -4.5 \times 10^4 + 3 \times 5 \times 10^9 y^2 \\ q &= -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= k \times 4.5 \times 10^4 = 0.03 \times 4.5 \times 10^4 = 1.35 \times 10^3 \text{ W}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

$$T_w = (T)_{y=0} = 70^\circ\text{C}$$

局所熱伝達率は、

$$h = \frac{q}{T_w - T_f} = \frac{1.35 \times 10^3}{70 - 20} = 27 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

4 対流伝熱の理論と数値解析

対流伝熱に直接関与するのは壁面近くの境界層の領域でその温度分布がわかれば、上述したように局所熱伝達率を求める。それを求めるために境界層内部の微小体積要素に関して質量の保存、運動量の保存、エネルギーの保存を考慮することで、非圧縮性流体の場合、以下の式が得られる。詳細な導出は別の教科書³⁾に譲りたい。

連続の式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4-3)$$

運動方程式：

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x \quad (4-4)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g_y \quad (4-5)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g_z \quad (4-6)$$

エネルギーの式

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4-7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(w\phi)}{\partial z} \end{aligned} \quad (4-8)$$

流体の温度分布は、流体の運動の影響をうけるのでエネルギー式 (4-7) の中に速度が含まれることになる。したがって、その温度分布を求めるためには、境界層内部の連続の式と運動方程式を解き速度を求める必要がある。非圧縮性流体の場合、未知数は速度 (u, v, w)、圧力 p 、温度 T の5個で、これらは式 (4-3) ～ (4-7) の5つの式、および適切な初期条件と境界条件を与えれば原理的に解くことが可能である。運動方程式とエネルギー式は2階の微分項を含んでいるので、 x, y, z それぞれの方向に対して2つの境界条件が必要である。主な境界条件には次の3つのタイプがある。

- (a) 第1種境界条件：境界において解くべき変数の値が与えられるような境界条件である。例えば、速度や温度の値が与えられている場合である。
- (b) 第2種境界条件：変数の勾配が指定されるような境界条件である。速度の場合には剪断力がゼロ ($\partial u / \partial x = 0$) であったり、温度の場合は熱流束が指定されるような境界条件である。例えば x 方向の境界で熱流束が与えられる場合は、次式となる。

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_x \quad (4-9)$$

境界が断熱の場合は $q_x = 0$ とすればよい。

- (c) 第3種境界条件：変数の勾配がその変数の一次関数で与えられるような境界条件であり、熱伝達率 h が与えられる場合の温度の境界条件は

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_f) \quad (4-10)$$

以上述べたように、式 (4-3) ～ (4-7) を、適切な初期条件および境界条件を与えてこれらの厳密解が求められれば境界層内部の温度分布が計算できる。ところが実際にはこれらの複雑な微分方程式を解き、厳密解を得ることは特別な場合を除き極めて難しい。一般には、コンピュータで数値解を得るが、困難な場合も少なくない。そこで、そのような場合には対流伝熱に関する実験を直接行って、種々の条件において得た熱伝達率を整理しておくのである。この相関式をうまく使えば手軽にエクセルを用いて伝熱解析することも可能となる。

5 対流伝熱を支配する無次元数と物理的意味

熱伝達率に及ぼす物理量の影響を個別の実験から調べて実験式を作ろうとすると、実験式中に使用する物理量が多く

なると実験も煩雑になる上、実験結果の整理にも無駄な労力を費やしてしまうことになる。そこで“次元解析”という方法を用いることで、対流伝熱に関連する無次元数を得ることができ、効率的な実験計画が立てられる。対流伝熱においては次の無次元数が支配していることが知られている。それらの物理的意味は以下の通りである。

ヌセルト数 (Nusselt number)

$$Nu = \frac{\text{熱伝達による伝熱量}}{\text{流体の熱伝導による伝熱量}} = \frac{h\Delta T L^2}{k \frac{\Delta T}{L}} = \frac{hL}{k}$$

レイノルズ数 (Reynolds number)

$$Re_L = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu \frac{V}{L}} = \frac{VL}{\nu}$$

プラントル数 (Prandtl number)

$$Pr = \frac{\text{運動量の拡散}}{\text{熱の拡散}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$$

グラスホフ数 (Grashof number)

$$\begin{aligned} Gr_L &= \frac{\text{液体が膨張したために生じる浮力}}{\text{粘性力}} \\ &= \frac{\rho g L^3 \beta (T_w - T_e)}{\mu \frac{\mu}{L} L^2} = \frac{g \beta (T_w - T_e) L^3}{\nu^2} \end{aligned}$$

したがって物体表面の寸法が異なっても形が相似であれば熱伝達率を与える Nu 数は、 $Nu = f(Re, Pr, Gr)$ の形で表せる。強制対流熱伝達で浮力の影響が無視できる場合には Gr は独立変数とならず、 $Nu = f(Re, Pr)$ となり、自然対流熱伝達では流速を対象とする Re は独立変数とならないので $Nu = f(Pr, Gr)$ となる。次に、強制対流と自然対流の具体的な関数型を考えていこう。

6 強制対流熱伝達

固体壁と接して流体が流れている時には、固体壁面上に境界層が形成される。この境界層と熱伝達の関係について、平板に沿った流れを考える。図4-2に示すように一様な速度 u_∞ の流れに平行に平板が置かれている場合、粘性のために速度が u_∞ よりも小さくなる層が平板の近傍に形成される。この層を上述したように速度境界層と呼ぶ。境界層外の流れの主要部は主流という。速度境界層内で速度は壁面におけるゼロから主流の速度 u_∞ まで連続的に変化している。境界層内の流れは、初めは層流であるがある距離 x_c 進んだところで平板に接した極めて薄い層 (粘性底層) を除いて、乱流になる。こ

の遷移が生じる臨界レイノルズ数 Re_c は主流の乱れの程度や前縁の形などによって異なるが、一般に $Re_c=5 \times 10^5$ 程度である。流体の主流の温度 T_∞ と平板表面の温度 T_w との間に差があつて熱伝達が生じている場合には温度が T_∞ から T_w まで連続的に変わっている層が平板近傍に存在する。これを温度境界層と呼ぶ。この層も速度境界層と同様に平板の前縁ではゼロであり、平板に沿って次第に厚くなる。したがって熱伝達率は、図4-3に示すように前縁では無限大であり、境界層の増大とともに低下する。

乱流境界層の場合には境界層内の乱れの程度が熱伝達に大きい影響を及ぼし、乱れの小さい粘性底層がその熱抵抗の大部分を占めるのでこの層の厚さが特に問題となる。したがって熱伝達率を向上させるためには境界層をできるだけ薄くする（乱流の場合には、特に粘性底層を薄くする）ように工夫すればよいことがわかる。このためには流速を大きくする乱れを大きくする、あるいは伝熱面を小さく分割して境界層自体の発達を妨げるなどの方法がある。

さて、熱伝達率に話を戻そう。上述したように局所熱伝達率は流れ方向に変化する。実際の問題では伝熱面全体について平均した平均熱伝達率が必要である。

等温条件において層流境界層の場合には、以下の通りである。

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.6) \quad (4-11)$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad \text{より}$$

平均ヌセルト数は次式で算出できる。

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k} = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (Pr \geq 0.6) \quad (4-12)$$

局所値よりも平均値が、大きくなる（その理由は図4-3の熱伝達率の変化を見れば明らかだろう）ので、伝熱計算する場合にはその意味をよく理解して使う必要がある。

乱流境界層の場合の局所熱伝達率 Nu_x は、以下で与えられる。

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (0.6 < Pr < 60) \quad (4-13)$$

したがって平板上で層流と乱流が混在する場合には以下の通りとなり、

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_c} h_{x,lam} dx + \int_{x_c}^L h_{x,turb} dx \right)$$

平均ヌセルト数 $\bar{Nu}_L$ は

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k} = Pr^{1/3} \{ 0.037 (Re_L^{4/5} - Re_c^{4/5}) + 0.664 Re_c^{1/2} \} \quad (4-14)$$

ここで、 $Re_c=5 \times 10^5$ とすれば、以下となる。

$$\bar{Nu}_L = Pr^{1/3} (0.037 Re_L^{4/5} - 873) \quad (4-14')$$

上述したように、平均ヌセルト数は、等温条件、等熱流束条件または層流、乱流、もしくは両者を考える必要があるかによって用いる式が異なる。これらに関する式を、等温条件および等熱流束条件の場合について以下にまとめるが、それほど大きく変わらないようである。

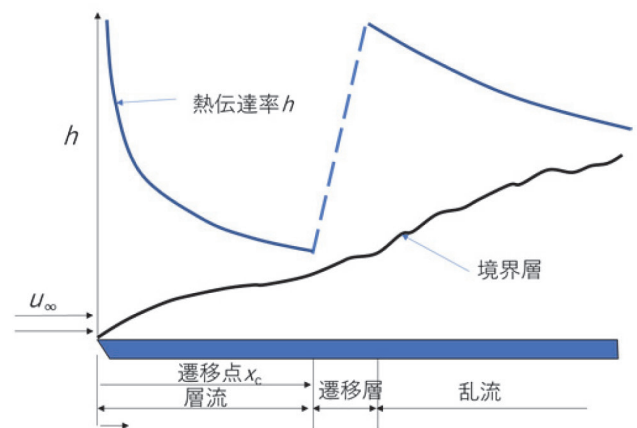


図4-3 平板上の境界層厚さと熱伝達率の関係 (Online version in color.)

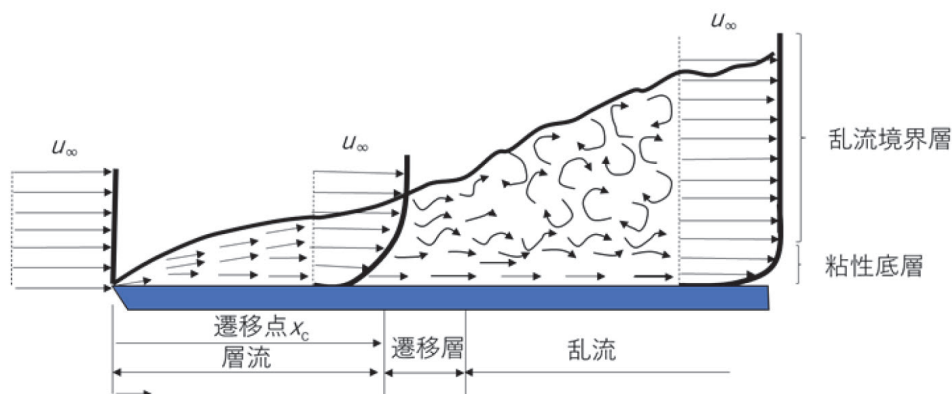


図4-2 平板上の速度境界層と温度境界層の発達過程 (Online version in color.)

表 4-2 平板外部流れの強制対流熱伝達に関する相関式のまとめ³⁾

等温条件		等熱流束条件	
層流			
速度境界層厚さ	$\delta = 5xRe_x^{-1/2}$ (4-16)	$Pr \geq 0.6$	$Pr \geq 0.6$
温度境界層厚さ	$\delta_t = \delta Pr^{-1/3}$ (4-17)		
局所ヌセルト数	$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$ (4-11)		
平均ヌセルト数	$\overline{Nu}_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$ (4-12)		
乱流			
速度境界層厚さ	$\delta = 0.37xRe_x^{-1/5}$	$5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^8$	$5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^8$
局所ヌセルト数	$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$ (4-13)	$0.6 \leq Pr \leq 60$	$0.6 \leq Pr \leq 60$
平均ヌセルト数	$\overline{Nu}_L = 0.037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$ (4-15)		
層流と乱流の混在			
平均ヌセルト数	$\overline{Nu}_L = Pr^{1/3} \left\{ \begin{array}{l} 0.037 (Re_L^{4/5} - Re_c^{4/5}) \\ +0.664 Re_c^{1/2} \end{array} \right\}$ (4-14)	$Re_c = 5 \times 10^5$ $0.6 < Pr < 60$ $Re_c \leq Re_L \leq 10^8$	

7 自然対流熱伝達

前節で述べた外部からの強制力による流動ではなく、流体内の温度分布による密度差に基づく、体積力によって流動が生じる場合を自然対流という。固体面の温度が流体温度よりも高い場合、固体面近傍の流体は加熱されて固体面から離れた周囲の流体よりも密度が小さくなるのでそこに浮力が生じる。この浮力によってその部分の流体が上向きに流れ、対流が生じる。

垂直に置かれた加熱平板の場合、図4-4に示すように平板の下端から境界層が発達する。境界層内の速度 u および T は図4-4に示したような分布になる。この境界層ははじめ層流であるが下端からある高さの点 x_c で乱流に遷移する。この遷移が生じる臨界グラスホフ数とプラントル数の積の値は一般に

$$Ra_{x,c} = Gr_{x,c} Pr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) x^3}{\nu \alpha} \approx 10^9 \dots\dots\dots (4-21)$$

程度である。

様々な形態における自然対流の相関式は、上述したように $Nu=f(Pr, Gr)$ の形になり、それを表4-3にまとめた。物性値は膜温度 $(= (T_w + T_\infty)/2)$ における値を用いる。それでは、以下の例題で加熱した鉄板の冷却に対する自然対流とふく射の影響について考えてみよう。

例題 4.2

室温が30℃の空間に1000℃まで加熱した鉄の板（厚さ δ : 0.05 m×幅 W : 1.20 m×長さ L : 10 m）が断熱材の上に置かれている。500℃まで冷却されるのに必要な時間を考えてみよう。

【仮定】

- ・ 集中熱容量モデルが適用可能。

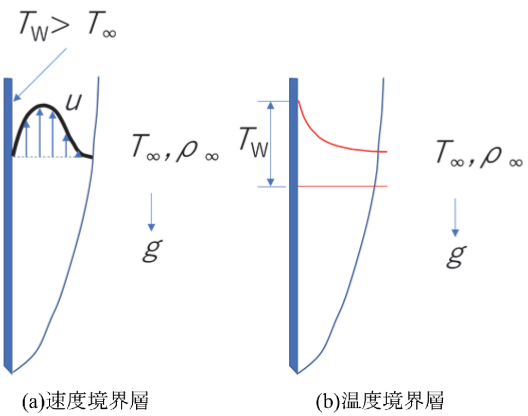


図4-4 鉛直加熱平板上の境界層の発達 (Online version in color.)

- ・ 側壁からの放熱は無視できる。
- ・ 板下部は断熱されている。
- ・ 放射率は1。

【解析】

エネルギー保存則より

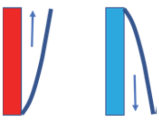
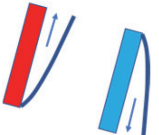
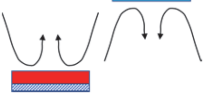
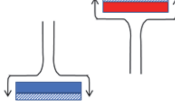
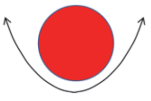
$$\begin{aligned} \rho c (\delta WL) \frac{dT}{dt} &= - (h_{conv} (T_w - T_\infty) WL - \varepsilon \sigma (T_w^4 - T_\infty^4) WL) \\ &= - (h_{conv} (T_w - T_\infty) WL - h_{rad} (T_w - T_\infty) WL) \end{aligned} \dots\dots\dots (4-28)$$

ここで

$$\begin{aligned} h_{rad} &= \varepsilon \sigma (T_w^2 + T_\infty^2) (T_w + T_\infty) \\ \rho c \delta \frac{dT}{dt} &= - (h_{conv} + h_{rad}) (T_w - T_\infty) \end{aligned} \dots\dots\dots (4-29)$$

差分化して

表 4-3 平板外部流れの強制対流熱伝達に関する相関式のまとめ³⁾ (Online version in color.)

幾何形状	相関式
1. 鉛直板 	$\overline{Nu}_L = \left[0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{\left\{ 1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right\}^{8/27}} \right]^2, \text{ all } Ra_L \quad (4-22)$ $Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}$
2. 傾斜板 	$\overline{Nu}_L = \left[0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{\left\{ 1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right\}^{8/27}} \right]^2, \quad 0 \leq \theta \leq 60^\circ \quad (4-23)$ $Ra_L = Gr_L Pr = \frac{(g \cos \theta)\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}$
3. 上向き加熱板、下向き冷却板 	$\overline{Nu}_L \equiv \frac{\bar{h}_L L}{k} = 0.54 Ra_L^{1/4}, \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7, Pr \geq 0.7 \quad (4-24)$ $\overline{Nu}_L \equiv \frac{\bar{h}_L L}{k} = 0.15 Ra_L^{1/3}, \quad 10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}, \text{ all } Pr$ $Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}$ $L_c \equiv \frac{A_s}{P} = \frac{\text{the plate surface area(one side)}}{\text{perimeter}}$
4. 上向き冷却板、下向き加熱板 	$\overline{Nu}_L \equiv \frac{\bar{h}_L L}{k} = 0.52 Ra_L^{1/5}, \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^9, Pr \geq 0.7 \quad (4-25)$ $Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L_c^3}{\nu\alpha}$ $L_c \equiv \frac{A_s}{P} = \frac{\text{the plate surface area(one side)}}{\text{perimeter}}$
5. 水平円柱 	$\overline{Nu}_D = \left[0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left\{ 1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right\}^{8/27}} \right]^2, \quad Ra_L \leq 10^{12} \quad (4-26)$ $Ra_D = Gr_D Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)D^3}{\nu\alpha}$
6. 球 	$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{\left\{ 1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right\}^{4/9}}, \quad Ra_L \leq 10^{11}, Pr \geq 0.7 \quad (4-27)$ $Ra_D = Gr_D Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)D^3}{\nu\alpha}$

$$\rho c \delta \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta t} = -(h_{conv} + h_{rad})(T_m - T_\infty)$$

$$T_{m+1} = T_m - \frac{\Delta t}{\rho c \delta} (h_{conv} + h_{rad})(T_m - T_\infty)$$

初期条件： $T_0=1000^\circ\text{C}$ を与え、式(4-26)と式(4-29)からそれぞれ各時刻における h_{conv} と h_{rad} を求め、 T_{m+1} を順次算定していく。

計算結果を図4-5に示す。この結果より、 500°C までの冷却に要する時間は、対流とふく射($\epsilon=1$)の場合には、約22分、対流のみの場合には約3時間と大きく結果が異なる。冷却開始時(1000°C)における熱伝達率は、それぞれ $h_{conv}=13\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ 、 $h_{rad}=153\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ と算定され、当然のことながらふく射は無視できない。なお、対流とふく射($\epsilon=0.5$)の場合に

は約40分という結果が得られた。集中熱容量モデルが適用可能だったかを確認するために冷却開始時の Bi ($=hL_c/k_{Fe}$)を算定すると、対流だけの場合には $Bi=0.01$ 、対流とふく射の効果を考慮すると $Bi=0.14$ となり、集中熱容量モデルの適用が推奨される $Bi<0.1$ を若干逸脱しており、これを念頭において解析結果を考察する必要がある。

コメント：

- ・第1回目の集中熱容量モデルの説明で、温度変化を予測する $T=T_f + (T_0 - T_f)\exp(-Aht/mc)$ は、熱伝達率が一定という仮定のもと積分して導出されたものであり、今回のように時間とともに熱伝達率が変化する場合には厳密には適用できない。ただし、対流だけを考慮した場合には、ほとんど熱伝達率が変化しないので結果はほぼ同じになる。

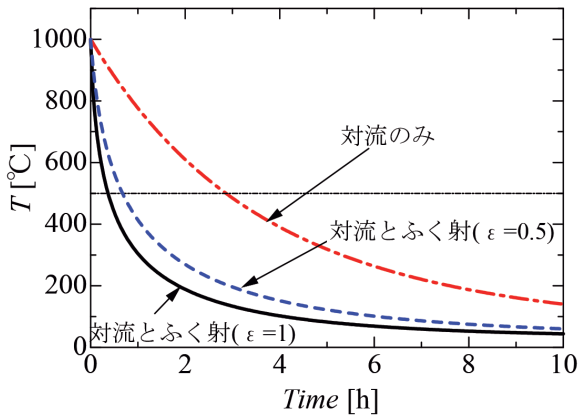


図4-5 高温鉄板の自然対流冷却時における対流とふく射の影響
(Online version in color.)

- ・今回は、板厚さが5cmと薄いため側壁からの放熱は無視したが、無視できない場合には、表4-3の鉛直板の場合の式(4-22)を使って、熱伝達率を算出し、式(4-28)の右辺に放射の項とともに追加すればよい。なお、側壁からの放熱も考慮したところ、1000℃から500℃まで冷却に要する時間は、対流とふく射(ε=1)の場合には、約20分、対流のみの場合には約2.6時間と算定され、やはり今回の場合には側壁の影響は小さい。
- ・上記の計算では、時間刻み幅の影響も考慮しておく必要があるが、 Δt =約10秒以下にすれば十分であった。

次に垂直平板で隔てられた高温流体と低温流体との間の自然対流熱伝達を考えてみよう

例題4.3

図4-6に示すように長さ L の垂直平板を挟んで高温流体(温度 T_h)と低温流体(温度 T_c)が自然対流により熱交換をしている。この時の伝熱量(熱流束)と垂直平板の左右の表面温度を求めてみる。流体は高温側、低温側ともに空気とし、計算の条件を以下のように設定する。

流体：空気

高温側空気温度：200℃

低温側空気温度：20℃

垂直平板長さ L ：1m

垂直平板厚さ δ ：5mm

垂直平板熱伝導率 k_w ：16W/(m・K)

この問題では垂直平板の左右の表面温度がわからないので、物性値を計算するための膜温度もわからない。そこで、左側の表面温度として推定値を与えてから計算を始める。 T_h と T_c の間にあることは間違いないので、算術平均値

$$T_{w1,0} = (T_h + T_c) / 2 = 110^\circ\text{C}$$

を初期推定値とする。これに対する高温側の膜温度は125℃

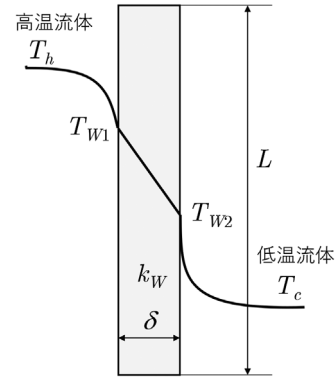


図4-6 高温流体から低温流体までの温度分布

となるので、まずこの温度で左表面の熱伝達率を計算するための空気の熱物性値を求める。

(高温側の熱物性値) $T_{f1}=155^\circ\text{C}$

$$\beta = 0.002337 \text{ K}^{-1}, \alpha = 4.212 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$k = 0.03533 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \nu = 2.940 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, Pr = 0.6981$$

これらの値と式(4-24)を使って $Ra_{L,h}$ と $Nu_{L,h}$ を計算すると

$$Ra_{L,h} = 1.666 \times 10^9, Nu_{L,h} = 143.5$$

高温側の熱伝達率は

$$h_h = k Nu_{L,h} / L = 5.072 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

となる。これより、高温側表面の熱流束は

$$q_h = h_h (T_h - T_{w1}) = 5.072 \times (200 - 110) = 456.5 \text{ W}/\text{m}^2$$

である。この熱流束を使って、低温側の板表面の温度を求めると

$$T_{w2} = T_{w1} - \frac{q_h L}{k} = 110 - (456.5 \times 5 \times 10^{-3}) / 16 = 19.9^\circ\text{C}$$

となる。この温度で計算した低温側の膜温度 $T_{f2}=64.93^\circ\text{C}$ で物性値を求めると

$$\beta = 0.002963 \text{ K}^{-1}, \alpha = 2.770 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$k = 0.02916 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \nu = 1.947 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, Pr = 0.7029$$

これらの値と式(4-24)を使って $Ra_{L,c}$ と $Nu_{L,c}$ を計算すると

$$Ra_{L,c} = 4.843 \times 10^9, Nu_{L,c} = 200.5$$

高温側の熱伝達率は

$$h_c = k Nu_{L,c} / L = 5.846 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

となる。これより、高温側表面の熱流束は

$$q_c = h_c (T_{w2} - T_c) = 5.846 \times (109.9 - 20) = 525.3 \text{ W}/\text{m}^2$$

となり、当然この値は高温側の熱流束 q_h と一致しない。そこで、 T_{w1} の推定値を次式により補正する。

$$q_{ave} = \frac{q_h + q_c}{2} = (456.5 + 523.3) / 2 = 490.9 \text{ W/m}^2$$

$$T_{w1,1} = T_h - \frac{q_{ave}}{h_h} = 200 - 490.9 / 5.072 = 103.2^\circ\text{C}$$

この値を使って同じ計算を繰り返すと、数回繰り返せば最終的に収束値

$$T_{w1} = 105.2^\circ\text{C}$$

が得られる。その時の各値は
(高温側)

$$\begin{aligned} T_{w1} &= 105.2^\circ\text{C}, T_{f1} = 152.6^\circ\text{C}, \beta = 0.002351 \text{ K}^{-1}, \\ a &= 4.171 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, k = 0.03518 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \\ \nu &= 2.912 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \text{Pr} = 0.6982, Ra_{L,h} = 1.799 \times 10^9, \\ Nu_{L,h} &= 147.0, h_h = 5.172 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}), q_h = 490.3 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

(低温側)

$$\begin{aligned} T_{w2} &= 105.0^\circ\text{C}, T_{f2} = 62.52^\circ\text{C}, \beta = 0.002985 \text{ K}^{-1}, \\ a &= 2.734 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, k = 0.02899 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \\ \nu &= 1.922 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \text{Pr} = 0.7031, Ra_{L,c} = 4.736 \times 10^9, \\ Nu_{L,c} &= 199.1, h_c = 5.771 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}), q_c = 490.8 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

T_{w1} の値は収束するが、 q_h と q_c の値は4桁目が一致しない。しかしながらこの程度の不一致は許容範囲と考えていい。この計算例のように、整理式を使った熱伝達率や伝熱量(熱流束)の推算では、収束解を得るまで熱物性値を頻繁に求める必要があり煩雑である。また、ここで設定した平板の両側では温度差が0.2K程度しかなく、平板内での温度降下は無視しても差し支えない。

記号表

$a (=k/(\rho c_p))$: 熱拡散率 (m^2/s)
 c : 比熱 ($\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$)
 c_p : 定圧比熱 ($\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$)
 g : 重力加速度 (m/s^2)
 h : 熱伝達率 ($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$)

k : 熱伝導率 ($\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$)
 L : 代表寸法, 長さ (m)
 $L_c (= \text{体積}/\text{表面積})$: 等価長さ (m)
 p : 圧力 (Pa)
 q : 熱流束 (W/m^2)
 T : 温度 ($\text{K}, ^\circ\text{C}$)
 t : 時刻 (s)
 u, v, w : 速度 (m/s)
 W : 幅 (m)
 x, y, z : 座標 (m)

ギリシャ文字

$\beta (=1/T_\infty)$: 流体の体膨張係数 ($1/\text{K}$)
 ϵ : 放射率
 δ : 厚さ (m)
 ν : 動粘度 (m^2/s)
 ρ : 密度 (kg/m^3)
 σ : Stefan-Boltzmann 定数 ($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$)

添字

f : 流体
 ∞ : 主流の値
 W : 壁面の値

参考文献

- 1) JSMEテキストシリーズ「伝熱工学」, 日本機械学会, (2003).
- 2) 伝熱工学資料 改訂第5版, 日本機械学会, (2009).
- 3) F.P.Incropera and D.P.DeWitt: Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley & Sons, (1996).
- 4) 吉田駿: 伝熱学の基礎, 理工学社, (1999).

(2021年12月2日受付)

【訂正とお詫び】

本誌 冊子版掲載記事に、以下の誤りがございました。訂正してお詫びいたします。
Vol.26 (2021) No.11 入門講座 伝熱工学－1 「伝熱基礎」正誤表

No.	頁	行	誤	正
1	674	式(1-22)	$h = \frac{mc}{A(t_2 - t_1)} \cdot \ln \left(\frac{T_2 - T_f}{T_1 - T_f} \right)$	$h = - \frac{mc}{A(t_2 - t_1)} \cdot \ln \left(\frac{T_2 - T_f}{T_1 - T_f} \right)$
2	674	表1-4	比熱 57.3 J/(kg・K)	比熱 757.3 J/(kg・K)
3	675	記号表	$a (= \rho c_p/k)$: 熱拡散率 (m^2/s)	$a (= k/\rho c_p)$: 熱拡散率 (m^2/s)

電子版は、修正済みの記事に差し替えて掲載しております。