



# 入門講座

品質管理のための統計的方法の活用 -2

## 統計的方法の基礎 (2)

Statistical Method (2)

竹士伊知郎

Ichiro Chikushi

QMビューローちくし 代表  
(一財)日本科学技術連盟 嘱託  
関西大学 化学生命工学部  
非常勤講師

前号 (Vol.28 No.5 P304) からの続き

### 4 統計的方法の基礎 (2)

#### 4.1 基本統計量

母集団の推測を具体的に行うことを考える。母集団から正しくサンプリングが行われていればサンプルのデータは母集団のデータを映しているはずである。したがって、母集団と同じようにサンプルのデータに対して平均値や分散を求める。このとき、サンプルのデータから得られた数値を統計量とよぶ (図2-1)。

統計では、同じ平均を表すものでも母数の母平均とサンプルから得られた統計量である平均値とは厳格に区別する。統計量の代表的なものに中心を表す平均値、ばらつきを表す不偏分散、標準偏差などがある。

##### 4.1.1 分布の中心をあらわす基本統計量

###### (1) 平均値 $\bar{x}$

もっとも基本的な統計量で、算術平均ともいう。

平均値 = データの総和 / データの数

で求めることができる。

$n$ 個のデータを  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  とすると、次の式によって平均値  $\bar{x}$  を求めることができる。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

###### (2) メディアン (中央値) $\tilde{x}$

得られたデータを大きさの順に並べかえたときの中央の値。データの数が奇数個のときは中央の値とし、偶数個のときは中央の2つの値の平均値とする。記号  $\tilde{x}$  (または Me) で表される。一般的に、メディアンは平均値に比べ推定精度は劣るが、計算が簡便であることと、データに異常値 (外れ値) がある場合に、その影響を受けないで分布の中心を知ることができるという利点がある。

##### 4.1.2 分布のばらつきをあらわす基本統計量

###### (1) 平方和 $S$

データのばらつき具合を見るには、まずは、おのおののデー

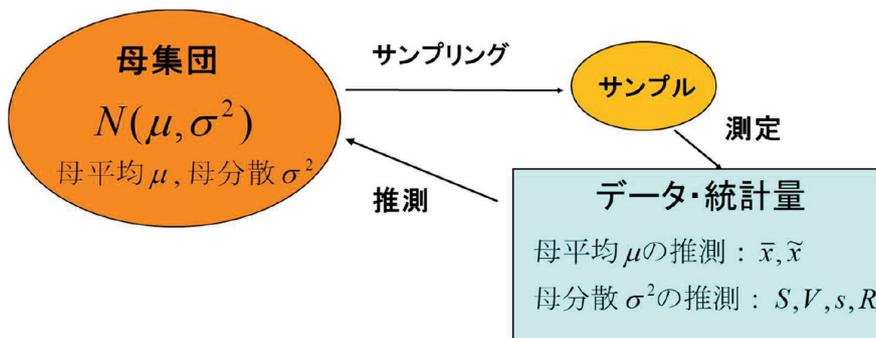


図2-1 母集団の推測 (Online version in color.)

タ  $x_i$  と平均値  $\bar{x}$  との差に注目すればよい。この差  $(x_i - \bar{x})$  を偏差とよぶ。

しかし偏差の総和は、以下の式でもわかるように常に0になってしまうので、ばらつきの尺度にはならない。

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n \frac{\sum x_i}{n} = \sum x_i - \sum x_i = 0$$

そこで、偏差を2乗したものの和を平方和  $S$  とし、

**平方和 = (各データの値 - 平均値)<sup>2</sup> の和**

で求める。数式であらわすと、

$$S = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

となる。

また、この式を変形すると、

$$\begin{aligned} S &= \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2 \sum x_i \bar{x} + \sum \bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + \bar{x}^2 \sum 1 \\ &= \sum x_i^2 - 2 \frac{\sum x_i}{n} \cdot \sum x_i + n \left( \frac{\sum x_i}{n} \right)^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \end{aligned}$$

となり、

**平方和 = (各データの値)<sup>2</sup> の和 - (各データの和)<sup>2</sup> / データ数** と求めることもできる。多くのデータから計算する場合にはこの方法が便利であることが多い。平方和  $S$  は分布の平均値から離れたデータが多いほど値が大きくなる。したがって、ばらつきが大きい場合には平方和の値も大きくなる。

注：平方和は偏差平方和とも呼ばれる

## (2) 分散 $V$

平方和  $S$  は、データのばらつきをあらわす統計量であるが、式からもわかるようにデータの数が大きくなると  $S$  の値も大きくなってしまふ。同じ母集団から採取されたデータであるにもかかわらず、データの数によってばらつきの値が異なるのは不都合である。

そこで、データの数の影響を受けない尺度として分散  $V$  を用いる。

**分散 = 平方和 / (データ数 - 1)**

で求める。数式であらわすと、

$$V = \frac{S}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}$$

となる。

ここで、なぜ (データ数) ではなく (データ数 - 1) なのかについて触れる。分散を求めるには、 $n$  個のデータから平均を求め、各データの偏差  $x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$  を計算する。偏差の合計は必ず  $(x_1 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$  なので、偏差のうち任意の  $(n-1)$  個を定めれば、残りの1つは決まってしまう。よっ

て、 $n$  個の偏差のうち独立なものは  $(n-1)$  個となる。これを自由度という。分散の式を自由度を使って表すと、

**分散 = 平方和 / 自由度**

となる。また、このようにして求めた値のほうが平方和を  $n$  で割った値よりも、母分散の値に近いことが知られている。よってこの値を不偏分散とよぶことがある。

## (3) 標準偏差 $s$

平方和も分散も元のデータの2乗の形になっているので、その単位も元のデータの2乗になっている。これは平均値や元のデータと比較する場合には不都合である。

そこで、分散  $V$  の平方根をとり元のデータの単位に戻した標準偏差  $s$  を用いる。

**標準偏差 = 分散の平方根**

で求める。数式であらわすと、

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{S}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}}$$

となる。

## (4) 範囲 $R$

1組のデータの中の最大値と最小値の差を範囲  $R$  とよぶ。

**範囲 = 最大値 - 最小値**

で求める。数式で表すと、

$$R = x_{max} - x_{min}$$

となる。

範囲も分布のばらつきを表す統計量であり、簡便に求めることができるという特徴がある。しかし、最大値と最小値以外のデータは直接用いられないのでデータ数が多くなってくると、標準偏差に比べばらつきの尺度としての推定精度が悪くなる。したがって、通常、データ数が10以下のときに用いられる。

## (5) 変動係数 $CV$

標準偏差と平均値の比を変動係数  $CV$  といい、通常、パーセントで表す。

**変動係数 = (標準偏差 / 平均値) × 100**

で求める。数式で表すと、

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100 (\%)$$

となる。平均値に対するばらつきの相対的な大きさを表すのに用いる。ばらつきの程度が同じでも、平均値が小さければ、相対的に大きく変動していると考えられる指標である。

## (6) 工程能力指数

製品の品質を管理し改善するためには、その製品を製造する工程の実態を良く知る必要がある。工程が安定状態であるのか、製品の品質がその規格値に対して満足している状態な

のかなど、工程の持つ質的な能力の把握が重要である。この工程の持つ製品の質的能力を工程能力という。工程能力を把握する方法として、工程のばらつきの大さの製品規格の幅に対する関係を表す工程能力指数  $C_p$  が用いられる。

1) 工程能力指数の求め方

工程能力指数の求め方を図2-2に示す。

$S_U$ は規格の上限値、 $S_L$ は規格の下限值を示す。

両側に規格がある場合は、規格の幅 (規格の上限値-規格の下限值)を標準偏差の6倍で割った値が工程能力指数  $C_p$  となる。

例えば重量100g以上や不純物0.2%以下などのように、規格が片側にしかない場合は、平均値に対し規格のある側で求めればよい。

工程の平均値が簡単に調整できないような場合は、両側規格であっても工程のばらつきだけで工程能力を評価するのは適当とはいえない。このような場合は、工程平均の位置と規格の中心の位置のずれ、すなわちかたよりを考慮する必要がある。かたよりを考慮した工程能力指数  $C_{pk}$  は、平均値に近い方の規格に対して片側規格の場合と同様に求めることができる。

なお、 $C_{pk}$ は必ず  $C_p$  と等しいか  $C_p$  より小さい値をとる。

2) 工程能力指数の解釈

工程能力指数の値に応じて、一般に表2-1のような解釈を行い、それに応じた処置がなされる。

注：本章では、工程能力指数  $C_p$  を統計量として扱ったが、これを母数として扱うこともある。この場合、 $C_p = \frac{S_U - S_L}{6\sigma}$  と考える。しかしながら、一般に  $\sigma$  は未知であるので、

$\sigma$  の推定値として  $s$  で置き換えることになる。標準偏差  $s$  を求める際には、安定した工程から多くのデータを用いて計算すべきである。

4.2 統計量の分布

ある母集団からサンプルを抜き取り得られたデータの平均値や分散は一定の値ではなく、サンプリングのたびにばらつく。これらはサンプルから得られた数値であるので統計量である。サンプルがランダムサンプリングにより、確率的に公平になるような方法で抜きとられていれば、統計量も一つの確率分布に従う。

4.2.1 サンプルの平均  $\bar{x}$  の分布 (正規分布) (母分散  $\sigma^2$  既知)

正規分布に従う母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からランダムに抜き取られた大きさ  $n$  のサンプルの平均値  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$  は、平均  $\mu$ 、分散  $\frac{\sigma^2}{n}$  の正規分布に従う。

これは、期待値  $E(x)$  と分散の性質  $V(x)$  を用いて容易に導くことができる。

$E(x) = \mu, \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  なので、期待値の性質から、

$$E(\bar{x}) = \left(\frac{1}{n}\right)(E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n)) = \left(\frac{1}{n}\right)n\mu = \mu$$

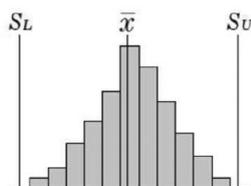
となる。また、

$V(x) = \sigma^2, \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  なので、分散の性質から、

$$V(\bar{x}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 (V(x_1) + V(x_2) + \dots + V(x_n)) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

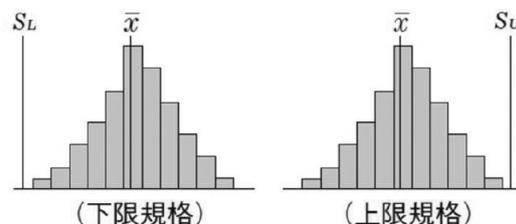
① 両側規格の場合：

$$C_p = \frac{S_U - S_L}{6s}$$



② 片側規格の場合：

$$C_p = \frac{\bar{x} - S_L}{3s}, \quad C_p = \frac{S_U - \bar{x}}{3s}$$



③ 両側規格で分布のかたよりを考慮した場合：

$$C_{pk} = \left\{ \frac{\bar{x} - S_L}{3s}, \frac{S_U - \bar{x}}{3s} \right\} \text{の小さいほう}$$

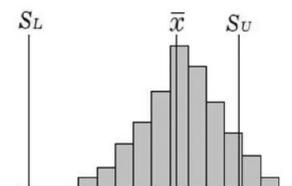


図2-2 工程能力指数の求め方

となる。

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  なので、 $u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$  とおくと (正規分布の標準化をしていることに注意)、 $u$  は標準正規分布  $N(0, 1^2)$  に従い、

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1^2)$$

となる。

これらを用いると、正規分布表 (付表1 3.4.1参照) を使っ

て、 $\bar{x}$ がある値以上または以下の値を取る確率を求めることができる (図2-3)。

#### 4.2.2 サンプルの平均 $\bar{x}$ の分布 (t分布) (母分散 $\sigma^2$ 未知)

4.2.1において、

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1^2)$$

表2-1 工程能力指数の解釈と処置

工程能力指数	解釈	処置
$C_p > 1.67$	場合によっては、 工程能力は十分すぎる	品質のばらつきが少し大きくなって問題ないので、管理の簡素化やコスト低減に注力する。
$1.67 \geq C_p > 1.33$	工程能力は十分にある	理想的な状態なので維持する。
$1.33 \geq C_p > 1.00$	まずまずの工程能力	工程管理をしっかり行い、管理状態を保つ。 $C_p$ が1に近づくと不適合品発生のおそれがあるので、必要に応じて処置をとる。
$1.00 \geq C_p > 0.67$	工程能力は不足している	工程の改善を必要とする。不適合品を検査で取り除く必要がある。
$0.67 \geq C_p$	工程能力は非常に不足しており、規格を満足しない	緊急に品質の改善対策を必要とする。規格の再検討を要する。

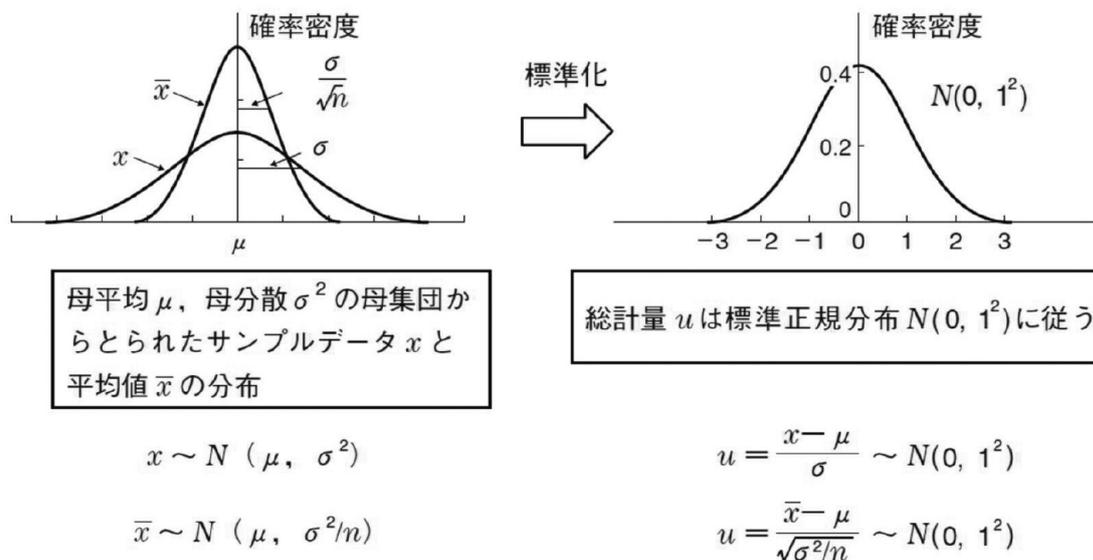
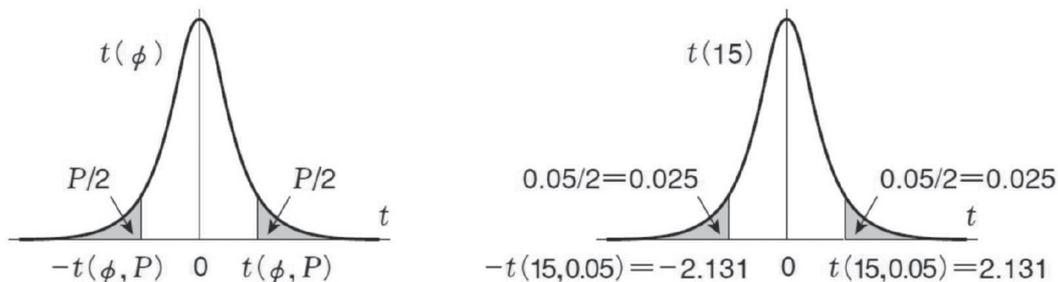
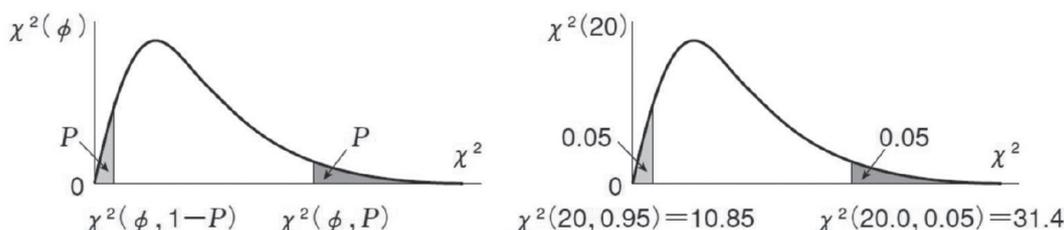


図2-3  $x, \bar{x}$ の分布と標準正規分布



\*正規分布表と異なりt表は両側確率で表示されていること注意。ただし、数値表は種々の種類があり中には片側確率で表示されているものもある。

図2-4 t表



\*正規分布やt分布と異なり分布は左右非対称なので上側確率で表示されている。下側確率は(1-上側確率)と求めることに注意。

図2-5  $\chi^2$ 表

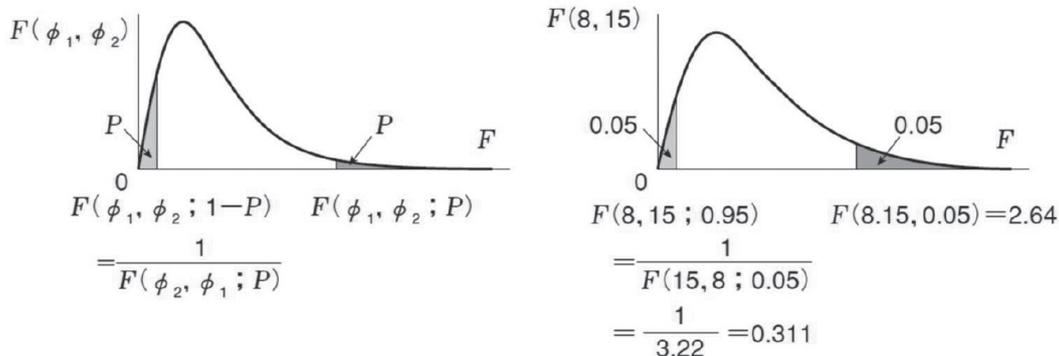


図2-6 F表

であったが、母分散  $\sigma^2$  が未知の場合、 $\sigma^2$  を統計量である分散  $V$  で置き換えて、

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{V/n}}$$

とおくと、 $t$  は自由度  $\phi = n - 1$  の  $t$  分布に従う。

すなわち、正規分布に従う母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からランダムに抜き取られた大きさ  $n$  のサンプルの平均値を  $\bar{x}$ 、分散を  $V$  とすると、

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{V/n}}$$

は自由度  $\phi = n - 1$  の  $t$  分布に従う。

### 4.2.3 t表とその見方

自由度  $\phi$  の  $t$  分布に従う確率変数  $t$  と両側確率  $P$  の関係を表にしたものが  $t$  表 (付表2) である。

- 1) 表の左右の見出しは、自由度  $\phi$  の値を表し、表の上の見出しは、両側確率  $P$  の値を表す。表中は対応する  $t$  の値を表す。例えば、 $\phi = 15$ 、 $P = 0.05$  に対応する  $t$  の値は、表の左右の見出しの15と、表の上の見出しの0.05が交差するところの値2.131を読み、 $t(15, 0.05) = 2.131$  と求める。
- 2)  $t$  分布も  $t = 0$  に対して左右対称なので、 $\phi = 15$ 、下側確率(下片側確率) 0.025に対応する  $t$  の値は  $-t(15, 0.05) = -2.131$  となる。

#### 4.2.4 平方和 $S$ の分布 ( $\chi^2$ 分布)

平方和 $S$

$$S = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

は、サンプルのばらつきをあらわす統計量の一つであるが、サンプルの大きさと母分散が大きくなるほど大きくなる。 $S$ を母分散 $\sigma^2$ で割って、

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2}$$

とおくと $\chi^2$  (カイ2乗) の分布となる。

正規分布に従う母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からランダムに抜き取った大きさ $n$ のサンプルの平方和を $S$ とすると、

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2}$$

は自由度 $\phi = n-1$ の $\chi^2$ 分布に従う。

#### 4.2.5 $\chi^2$ 表とその見方

自由度 $\phi$ の $\chi^2$ 分布に従う確率変数 $\chi^2$ と上側確率 $P$ の関係を表にしたものが $\chi^2$ 表 (附表3) である。

- 1) 表の左右の見出しは、自由度 $\phi$ の値を表し、表の上の見出しは、上側確率 $P$ の値を表す。表中は対応する $\chi^2$ の値を表す。例えば、 $\phi = 20$ 、 $P = 0.05$ に対応する $\chi^2$ の値は、表の左右の見出しの20と、表の上の見出しの0.05が交差するところの値31.4を読み、 $\chi^2(20, 0.05) = 31.4$ と求める。
- 2) 下側確率に対応する $\chi^2$ の値を求める場合を考える。例えば、 $\phi = 20$ 、下側確率0.05に対応する $\chi^2$ の値は、上側確率 $P = 1 - 0.05 = 0.95$ に対応する $\chi^2$ の値と等しくなるので、 $\chi^2(20, 0.95) = 10.85$ と求めればよい。

#### 4.2.6 分散の比の分布 ( $F$ 分布)

正規分布に従う2つの母集団 $N(\mu_1, \sigma_1)$  および $N(\mu_2, \sigma_2)$ から大きさがそれぞれ $n_1$ および $n_2$ のサンプルをランダムに抜き取って分散 $V_1$ 、 $V_2$ を求める。

$$F = \frac{V_1/\sigma_1^2}{V_2/\sigma_2^2}$$

は自由度対 $(\phi_1, \phi_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1)$ の $F$ 分布に従う。

#### 4.2.7 $F$ 表とその見方

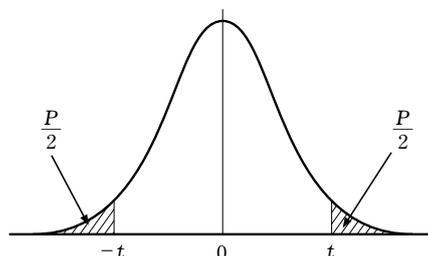
自由度対 $(\phi_1, \phi_2)$ の $F$ 分布に従う確率変数 $F$ と上側確率 $P$ の関係を表にしたものが $F$ 表 (附表4、附表5) である。

- 1)  $P$ の値によって、それぞれの表が用意されているので、求めたい $P$ の値によって $F$ 表を選択する。
- 2) 表の上下の見出しは、分子の自由度 $\phi_1$ の値を、表の左右の見出しは、分母の自由度 $\phi_2$ の値を表す。表中は対応する $F$ の値を表す。例えば、 $\phi_1 = 8$ 、 $\phi_2 = 15$ 、 $P = 0.05$ に対応する $F$ の値は、まず、 $F$ 表 (0.05 0.01) を選び、表の上下の見出しの8と、表の左右の見出しの15が交差するところの2つの値のうち、上段の細字の値2.64を読み、 $F(8, 15; 0.01) = 2.64$ と求める。下段の太字の値4.00は $P = 0.01$ の場合で、 $F(8, 15; 0.01) = 4.00$ となる。
- 3) 下側確率に対応する値は掲載されていないが、上側確率に対応する値から、 $F(\phi_1, \phi_2; 1-P) = 1/F(\phi_2, \phi_1; P)$ の関係 (右辺の分母において自由度が逆であることに注意) により求める。例えば、 $F(8, 15; 0.95) = 1/F(15, 8; 0.05) = 1/3.22 = 0.311$ となる。

(次号 Vol.28 No.7に続く)

(2023年1月19日受付)

付表2 t表



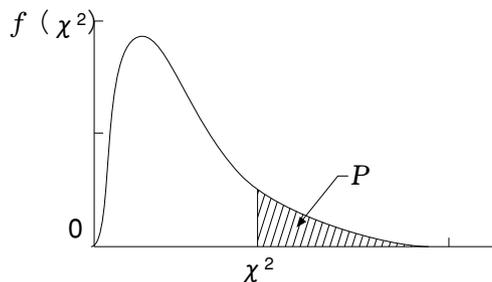
自由度  $\phi$  と両側確率  $P$  とから  $t$  を求める表

$\phi \backslash P$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	$P \backslash \phi$
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	<b>12.706</b>	31.821	<b>63.657</b>	636.619	1
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	<b>4.303</b>	6.965	<b>9.925</b>	31.599	2
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	<b>3.182</b>	4.541	<b>5.841</b>	12.924	3
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	<b>2.776</b>	3.747	<b>4.604</b>	8.610	4
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	<b>2.571</b>	3.365	<b>4.032</b>	6.869	5
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	<b>2.447</b>	3.143	<b>3.707</b>	5.959	6
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	<b>2.365</b>	2.998	<b>3.499</b>	5.408	7
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	<b>2.306</b>	2.896	<b>3.355</b>	5.041	8
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	<b>2.262</b>	2.821	<b>3.250</b>	4.781	9
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	<b>2.228</b>	2.764	<b>3.169</b>	4.587	10
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	<b>2.201</b>	2.718	<b>3.106</b>	4.437	11
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	<b>2.179</b>	2.681	<b>3.055</b>	4.318	12
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	<b>2.160</b>	2.650	<b>3.012</b>	4.221	13
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	<b>2.145</b>	2.624	<b>2.977</b>	4.140	14
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	<b>2.131</b>	2.602	<b>2.947</b>	4.073	15
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	<b>2.120</b>	2.583	<b>2.921</b>	4.015	16
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	<b>2.110</b>	2.567	<b>2.898</b>	3.965	17
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	<b>2.101</b>	2.552	<b>2.878</b>	3.922	18
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	<b>2.093</b>	2.539	<b>2.861</b>	3.883	19
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	<b>2.086</b>	2.528	<b>2.845</b>	3.850	20
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	<b>2.080</b>	2.518	<b>2.831</b>	3.819	21
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	<b>2.074</b>	2.508	<b>2.819</b>	3.792	22
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	<b>2.069</b>	2.500	<b>2.807</b>	3.768	23
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	<b>2.064</b>	2.492	<b>2.797</b>	3.745	24
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	<b>2.060</b>	2.485	<b>2.787</b>	3.725	25
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	<b>2.056</b>	2.479	<b>2.779</b>	3.707	26
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	<b>2.052</b>	2.473	<b>2.771</b>	3.690	27
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	<b>2.048</b>	2.467	<b>2.763</b>	3.674	28
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	<b>2.045</b>	2.462	<b>2.756</b>	3.659	29
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	<b>2.042</b>	2.457	<b>2.750</b>	3.646	30
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	<b>2.021</b>	2.423	<b>2.704</b>	3.551	40
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	<b>2.000</b>	2.390	<b>2.660</b>	3.460	60
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	<b>1.980</b>	2.358	<b>2.617</b>	3.373	120
$\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	<b>1.960</b>	2.326	<b>2.576</b>	3.291	$\infty$

例：  $\phi = 10$  の両側 5% 点 ( $P = 0.05$ ) に対する  $t$  の値は 2.228 である。

出典：森口繁一，日科技連数値表委員会編，『新編 日科技連数値表—第2版』，日科技連出版社，2009年。

付表3  $\chi^2$  表



自由度  $\phi$  と上側確率  $P$  とから  $\chi^2$  を求める表

$\phi \backslash P$	.995	.99	.975	.95	.90	.75	.50	.25	.10	.05	.025	.01	.005	$P \backslash \phi$
1	0.0 <sup>4</sup> 393	0.0 <sup>3</sup> 157	0.0 <sup>3</sup> 982	0.0 <sup>2</sup> 393	0.0158	0.102	0.455	1.323	2.71.	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.544	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59.	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.9	140.2	100

出典：森口繁一，日科技連数値表委員会編，『新編 日科技連数値表—第2版』，日科技連出版社，2009年。

付表 4 F 表 (0.025)

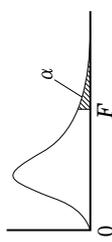


$F(\phi_1, \phi_2; \alpha) \alpha = 0.025$   
 $\phi_1 =$  分子の自由度  $\phi_2 =$  分母の自由度

$\phi_2 \backslash \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$	$\phi_1 \backslash \phi_2$
1	648.	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	963.	969.	977.	985.	993.	997.	1001.	1006.	1010.	1014.	1018.	1
2	38.5	39.0	39.2	39.3	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	2
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9	3
4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26	4
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02	5
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85	6
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14	7
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67	8
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33	9
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	10
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	11
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72	12
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60	13
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49	14
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40	15
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32	16
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25	17
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19	18
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13	19
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09	20
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04	21
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00	22
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97	23
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94	24
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91	25
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88	26
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85	27
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83	28
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81	29
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79	30
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64	40
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48	60
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31	120
$\infty$	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00	$\infty$

例： $\phi_1=5, \phi_2=10$ の  $F(\phi_1, \phi_2; 0.025)$  の値は、 $\phi_1=5$  の列と  $\phi_2=10$  の行の交わる点の値4.24で与えられる。  
 出典：森口繁一，日科技連数値表委員会編，『新編 日科技連数値表—第2版』，日科技連出版社，2009年。

付表5 F表 (0.05 0.01)



$F(\phi_1, \phi_2; \alpha) \alpha = 0.05$ (細字)  $\alpha = 0.01$ (太字)  
 $\phi_1$  = 分子の自由度  $\phi_2$  = 分母の自由度

$\phi_2 \backslash \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161.	200.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.	244.	246.	248.	249.	250.	251.	252.	253.	254.
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
$\infty$	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87

例  $\phi_1 = 5, \phi_2 = 10$ に対する  $F(\phi_1, \phi_2; 0.05)$  の値は,  $\phi_1 = 5$  の列と  $\phi_2 = 10$  の行の交わる点の上段の値(細字) 3.33 で与えられる。

付表5 (つづき)

$\phi_2 \setminus \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$	$\phi_1 \setminus \phi_2$
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01	$\infty$
17	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	16
18	4.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65	17
19	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92	18
20	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	19
21	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	20
22	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	21
23	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	22
24	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42	23
25	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	24
26	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	25
27	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	26
28	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	27
29	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	28
30	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	29
31	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	30
32	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	31
33	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	32
34	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17	33
35	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	34
36	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13	35
37	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	36
38	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10	37
39	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	38
40	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06	39
41	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64	40
42	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03	41
43	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	42
44	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01	43
45	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	44
46	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80	45
47	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	46
48	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60	47
49	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	48
50	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38	49
51	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	50
52	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00	51
$\phi_2 \setminus \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$	$\phi_1 \setminus \phi_2$

注  $\phi > 30$  で、表にない  $F$  の値を求める場合には、120/φを用いる1次補間により求める。  
 出典：森口繁一，日科技連数値委員会編，『新編 日科技連数値表—第2版』，日科技連出版社，2009年。